Programme Colles PCST 3 - 2025/26

Semaine de colles n°7 du 17/11/25 au 21/11/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Compléments sur la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle



Aucune théorie sur la décomposition en éléments simples n'est au programme... par contre, il faut savoir décomposer, sans aide, en éléments simples une fraction rationnelle simple.

Conformément au programme : « Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de dearé 2 la forme cherchée doit être fournie »

• Calcul de primitives et d'intégrales

Ce chapitre n'a pas pour but de permettre de résoudre des exercices théoriques d'intégration,

I - Rappels et compléments

- 🟓 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné, relation de Chasles, linéarité, positivité et ordre.
- Lien entre primitives et intégrales.

II - Quelaues méthodes de calcul

- Primitives usuelles (en lisant le tableau des dérivées « à l'envers »)
- Transformations judicieuses d'expressions / reconnaître des dérivées de fonctions composées

Ex. calcul de
$$\int_0^{\pi/4} \tan t \ dt$$
 , $\int_0^{\pi/4} \tan^2 t \ dt$, $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} \ dx$, $\int_0^{\pi} \sin(2t) e^{\sin^2 t} \ dt$, $\int_{-2}^2 \sqrt{t+2} \ dt$, $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3} \ dt$

- \Rightarrow Primitives de fonctions de la forme : $x \longrightarrow \cos^p x \sin^q x$
- Ra. Si p ou a est impair, on peut faire apparaître des termes de la forme « $u'(x) \times (u(x))^n$ »
- ightharpoonup 2 méthodes pour déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos(\omega x)e^{\lambda x}$ ou $x \longmapsto \sin(\omega x)e^{\lambda x}$
 - En utilisant que $\cos(\omega x)e^{\lambda x} = \text{Re}(e^{(\lambda + i\omega)x})$
 - Ou en cherchant une primitive sous la forme $x \longrightarrow (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{\lambda x}$

Une question de cours pourra être le calcul d'une primitive d'une fonction de cette forme. (*)

- Primitives de fonctions rationnelles :
 - Primitives de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + a}$ dans le cas de pôle simple / pôle double. (*) (sur un exemple)
 - Ex. Primitives de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

III - Formule d'intégration par parties

- ightharpoonup Intégration par parties pour les fonctions de classe C^1 , application au calcul de primitives.
- Ex. Primitives de In sur \mathbb{R}^{+*} (*)

IV - Changement de variable

- Changement de variable : application aux calculs d'intégrales et de primitives
- → Un changement de variable à connaître pour les fonctions en sin, cos et tan : t = tan $\frac{x}{3}$.

Ex. Sur]
$$0, \pi$$
 [, une primitive de x $\longmapsto \frac{1}{\sin x}$ est x $\longmapsto \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ (*)

NOUVEAU COURS :

- Équations différentielles linéaires (EDL)
- I Vocabulaire général sur les équations différentielles
- Vocabulaire général sur les ED : ordre, éguation linéaire, courbes intégrales.
- II EDL d'ordre 1 de la forme y' + a(x) y = b(x) (E), où a et b continues sur I intervalle de \mathbb{R}
- Cas particulier des EDL 1 à coefficients constants, condition initiale.
- 🟓 Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 1 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E).
- Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
- Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, si a est une constante on recherche d'une solution de la même forme que le second membre, mth, de variation de la cste,
- → Condition initiale : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

III - EDL 2 à coefficients constants : $ay''+by'+cy=\varphi(x)$ (E)

- 🟓 Éguation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 2 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E):
- Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H). Cas où les coefficients sont réels (expression des solutions à valeurs réelles).
- 🟓 Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, recherche d'une solution de la même forme que le second membre.

Exemples fait dans le cours : $y''-5y'+6y=e^{2x}+5e^{-x}$ (*)

$$y'' + y' + y = x \cos x + 1$$
 (*)

Conditions initiales : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

RQ pour les interrogateurs :

Nous n'avons pas encore vu : Raccord de solutions / changement de fonction inconnue / changement de variable pour la résolution d'EDL

(*) <u>Démonstrations / Méthodes à connaître</u> et TOUT le cours est à connaître!

Prévisions semaine n°8 : Ensembles et applications

Déroulement d'une colle

- 1. Une ou deux questions parmi :
 - Question de cours signalée par (*)
 - Calcul d'une intégrale ou primitive par changement de variable
 - Citer les théorèmes de résolution d'une EDL 1 ou EDL 2 homogène, à coefficients constants.
- 2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.



Pas de liste d'exercices à savoir refaire cette semaine :

- Il faut savoir calculer des intégrales et primitives
- Il faut savoir et résoudre des EDL 1.

À vous de vous entrainer sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction)