Semaine de colles n°7 du 17/11/25 au 21/11/25

Du programme précédent :

• **Compléments sur la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle**

Aucune théorie sur la décomposition en éléments simples n'est au programme… par contre, il faut savoir décomposer, sans aide, en éléments simples une fraction rationnelle simple.
Conformément au programme : « Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie »

• Calcul de primitives et d'intégrales

Ce chapitre n'a pas pour but de permettre de résoudre des exercices théoriques d'intégration.

I – Rappels et compléments

- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné, relation de Chasles, linéarité, positivité et ordre.
- Lien entre primitives et intégrales.

II – Quelques méthodes de calcul

- Primitives usuelles (en lisant le tableau des dérivées « à l'envers »)
- Transformations judicieuses d'expressions / reconnaitre des dérivées de fonctions composées

Ex. calcul de $\int_0^{\pi/4}\tan t\,dt$, $\int_0^{\pi/4}\tan^2 t\,dt$, $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$, $\int_0^\pi \sin(2t)e^{\sin^2 t}\,dt$, $\int_{-2}^2\sqrt{t+2}\,dt$, $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dt$

- Primitives de fonctions de la forme : $x \longmapsto \cos^p x \sin^q x$

Rq. Si p ou q est impair, on peut faire apparaitre des termes de la forme « $u'(x)\times(u(x))^n$ »

- 2 méthodes pour déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos(\omega x)e^{\lambda x}$ ou $x \longmapsto \sin(\omega x)e^{\lambda x}$
  En utilisant que $\cos(\omega x)e^{\lambda x} = \mathrm{Re}(e^{(\lambda+i\omega)x})$
  Ou en cherchant une primitive sous la forme $x \longmapsto (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\,e^{\lambda x}$

Une question de cours pourra être le calcul d'une primitive d'une fonction de cette forme. **(*)**

- Primitives de fonctions rationnelles :

Primitives de $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ dans le cas de pôle simple / pôle double. **(*)** (sur un exemple)

Ex. Primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

III – Formule d'intégration par parties

- Intégration par parties pour les fonctions de **classe C^1**, application au calcul de primitives.

Ex. Primitives de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$ **(*)**

IV – Changement de variable

- Changement de variable : application aux calculs d'intégrales et de primitives
- Un changement de variable à connaitre pour les fonctions en sin, cos et tan : $t = \tan\frac{x}{2}$.

Ex. Sur $]0, \pi[$, une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\sin x}$ est $x \longmapsto \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ **(*)**

Nouveau cours :

• Équations différentielles linéaires (EDL)

I – Vocabulaire général sur les équations différentielles

- Vocabulaire général sur les ED : ordre, équation linéaire, courbes intégrales.

II – EDL d'ordre 1 de la forme $y' + a(x)\,y = b(x)$ (E), où a et b continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$

- Cas particulier des EDL 1 à coefficients constants, condition initiale.
- Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 1 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E).
- Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
- Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, si a est une constante on recherche d'une solution de la même forme que le second membre, mth. de variation de la cste.
- Condition initiale : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

III – EDL 2 à coefficients constants : $ay''+by'+cy=\varphi(x)$ (E)

- Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 2 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E) :
- Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
  Cas où les coefficients sont **réels** (expression des solutions à **valeurs réelles**).
- Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, recherche d'une solution de la même forme que le second membre.

Exemples fait dans le cours : $y''-5y'+6y=e^{2x}+5e^{-x}$ **(*)**
$y''+y'+y=x\cos x+1$ **(*)**

- Conditions initiales : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

RQ pour les interrogateurs :
Nous n'avons pas encore vu : Raccord de solutions / changement de fonction inconnue / changement de variable pour la résolution d'EDL

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°8 : Ensembles et applications

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions parmi :
   Question de cours signalée par (*)
   Calcul d'une intégrale ou primitive par changement de variable
   Citer les théorèmes de résolution d'une EDL 1 ou EDL 2 homogène, à coefficients constants.
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Pas de liste d'exercices à savoir refaire cette semaine :
Il faut savoir calculer des intégrales et primitives
Il faut savoir et résoudre des EDL 1 et des EDL 2 à coefficients constants.
À vous de vous entrainer sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction)