

Semaine de colles n°8 du 24/11/25 au 28/11/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• **Équations différentielles linéaires (EDL)****I - Vocabulaire général sur les équations différentielles**

- ➡ Vocabulaire général sur les ED : ordre, équation linéaire, courbes intégrales.

II - EDL d'ordre 1 de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ (E), où a et b continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$

- ➡ Cas particulier des EDL 1 à coefficients constants, condition initiale.
- ➡ Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 1 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E).
- ➡ Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
- ➡ Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, si a est une constante on recherche d'une solution de la même forme que le second membre, mth. de variation de la cste.
- ➡ Condition initiale : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

III - EDL 2 à coefficients constants : $ay'' + by' + cy = \varphi(x)$ (E)

- ➡ Équation homogène associée à (E) et forme des solutions : Les solutions de l'EDL 2 (E) s'obtiennent en faisant la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière de (E) :
- ➡ Expression de la solution générale de l'équation homogène associée (H).
Cas où les coefficients sont **réels** (expression des solutions à **valeurs réelles**).
- ➡ Recherche d'une solution particulière : pp. de superposition des solutions, solution évidente, recherche d'une solution de la même forme que le second membre.

Exemples fait dans le cours : $y'' - 5y' + 6y = e^{2x} + 5e^{-x}$

$$y'' + y' + y = x \cos x + 1$$

- ➡ Conditions initiales : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy

NOUVEAU COURS :• **Équations différentielles linéaires (EDL)****Vu en TD :**

- ➡ Exemple de changement de fonction inconnue pour la résolution d'EDL (cf. ex. à savoir refaire)
- ➡ Exemple de changement de variable pour la résolution d'EDL (cf. ex. à savoir refaire)

RQ pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore vu d'exemple de raccord de solutions.• **Ensembles et applications****I - Notions sur les ensembles**

- ➡ Inclusion, appartenance, ensemble des parties d'un ensemble E.
- ➡ Opérations sur les parties d'un ensemble :
Réunion, intersection, distributivité.
Complémentaire, lois de Morgan
Différence.
- ➡ Recouvrement disjoint, partition
- ➡ Produit cartésien d'ensembles.

II - Applications

- ➡ Définition et exemples : application identité, fonction indicatrice, famille d'éléments
- ➡ Restriction, prolongement d'applications, application induite, composition de deux applications.
- ➡ Image directe et image réciproque.

Notation : Si $f : E \rightarrow F$, on note : $f(E) = \text{Im } f$ et s'appelle l'image de f.**Rq.** Pour éviter des confusions, pour le moment, l'image réciproque de B peut être notée : $f^{-1}(B)$ **⚠ On fera particulièrement attention à la notation « $f^{-1}(B)$ » qui ne signifie pas que f est bijective !****III - Injectivité, surjectivité, bijectivité**

- ➡ Définition et caractérisation d'une application injective.
La composée de deux applications injectives est injective. (*)
Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. (*)
- ➡ Définition et caractérisation d'une application surjective.
La composée de deux applications surjectives est surjective. (*)
Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. (*)

RQ pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore vu les applications bijectives**(*) Démonstrations / Méthodes à connaître** et TOUT le cours est à connaître !**Prévisions semaine n°9 :** Ensembles et applications (fin) + Nouvelles fonctions usuelles**Déroulement d'une colle**

- Deux questions le cours sur le chapitre : « Ensembles et applications » :
- Parmi celles signalées par (*)
- Donner les définitions et caractérisations d'image directe et d'image réciproque et donner des exemples.
- Donner les définitions et caractérisations d'application injective/surjective et savoir donner des exemples et contre-exemples.
- Trouver des exemples où $g \circ f$ injective et g non injective, $g \circ f$ surjective et f non surjective, etc...
- Exercice(s)

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Semaine de colles n°8 du 24/11/25 au 28/11/25 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 7

Il faut savoir et résoudre des EDL 1 et des EDL 2 à coefficients constants.

À vous de vous entraîner sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction)

Exercice 12 : *Changement de fonction inconnue.*

On considère l'équation $(x^2 + x)y'' + (x - 1)y' - y = 0$. (E)

1. Déterminer les fonctions polynômiales, non nulles, solutions de (E).

2. Sur $]1, +\infty[$, poser $y : x \mapsto (x - 1)z(x)$ où z est 2 fois dérivable et résoudre (E) sur $]1, +\infty[$.

$$\text{On donne : } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}, \quad \frac{3x^2 + 1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

(Vous devez être capable de retrouver ce développement en éléments simples)

Exercice 14 : *Changement de variable.*

Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation différentielle $x^2 y'' + x y' + y = 0$ (E), en posant $x = e^t$.

Exercice 17 :

Trouver toutes les fonctions f réelles, dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$.

Ind. On justifiera que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercices Chap. 8**Exercice 6 :** *Image directe.*

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère A , B et A' trois parties de E .

1. Rappeler la définition de l'image directe de A par f .

2. a. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f([0, 2])$ et $f([-3, 2])$.

b. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ et $f(\pi\mathbb{Z})$.

3. Que signifie la condition $\text{Im}(f) = F$?

4. Démontrer que si $A \subset A' \subset E$ alors $f(A) \subset f(A')$.

5. a. Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b. Montrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A-t-on l'égalité ?

c. Montrer que si f est injective alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Exercice 7 : *Image réciproque.*

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On considère A , B et B' trois parties de F .

1. Rappeler la définition de l'image réciproque de B par f . Que vaut $f^{-1}(F)$?

2. a. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f^{-1}([-4, 4])$ et $f^{-1}([1, 4])$.

b. Dans cette question, $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$, déterminer $f^{-1}([-4, 0])$ et $f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$.

3. Démontrer que si $B \subset B' \subset F$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

4. a. Montrer que : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

b. Montrer que : $f^{-1}(A \cap B) = \overline{f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)}$.

5. Montrer que : $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$



On fera particulièrement attention à la notation « $f^{-1}(B)$ » qui ne signifie pas que f est bijective !

Si $f : E \longrightarrow F$ et B une partie de F alors $f^{-1}(B)$ existe toujours et est l'image réciproque de B par f .

Par contre, pour $x \in F, f^{-1}(x)$ n'a de sens que si f est bijective.

Exercice 10 :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F . Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.