Semaine de colles n°10 du 08/12/25 au 12/12/25

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Équations différentielles linéaires (EDL)

Vu en TD :

- Exemple de raccord de solutions pour une EDL 1.

• Ensembles et applications

I - Notions sur les ensembles

II - Applications

III - Injectivité, surjectivité, bijectivité

- Définition et caractérisation d'une application injective.
  La composée de deux applications injectives est injective.
  Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- Définition et caractérisation d'une application surjective.
  La composée de deux applications surjectives est surjective.
  Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- Définition d'une application bijective, application réciproque, propriétés, bijection réciproque d'une composée.
- Soit $f : E \longrightarrow F$. S'il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ alors f bijective et $g = f^{-1}$. **(*)**

• Nouvelles fonctions usuelles

I - Fonctions circulaires réciproques

- Fonctions circulaires réciproques : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).
  Justification de la dérivabilité et calcul de la dérivée des fonctions arccos, arcsin et arctan **(*)**

En particulier, il faut savoir démontrer que : $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

- On a : $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ **(*)**

NOUVEAU COURS :

• Nouvelles fonctions usuelles

II - Fonctions hyperboliques directes : ch et sh

- Définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles), $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch^2x - sh^2x = 1$.
- Complément : étude de la fonction tangente hyperbolique. **Cette fonction est hors programme.**

III - Retour sur le calcul de primitives et d'intégrales

- Primitives de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $]-a, a[$ et primitives de $x \longmapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ sur $\mathbb{R}$
- Primitives de $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Rq. Il ne s'agit pas de connaitre les formules par cœur mais il faut savoir appliquer la méthode sur un exemple choisi par l'interrogateur. **(*)**

• Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I - Les entiers naturels et le principe de récurrence

- L'ensemble $\mathbb{N}$.
- Raisonnement par récurrence simple, double/avec deux prédécesseurs, forte et finie.

II - Les entiers relatifs

- L'ensemble $\mathbb{Z}$, Multiples et diviseurs d'un entier, PGCD et PPCM

III - Division euclidienne

- Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
- Algorithme d'Euclide pour le calcul d'un PGCD

IV - Nombres premiers

- Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers (admis)
  L'ensemble des nombres premiers est infini **(*)**
- Application au calcul du PGCD et PPCM, PGCD(a, b) × PPCM(a, b) = ab

Rq. pour les interrogateurs : Nous n'avons pour le moment pas fait d'exercices d'arithmétique.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n°11 : Suites numériques (début)

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions de cours parmi :
   - Une question parmi celles signalées par (*)
   - Donner tous les résultats relatifs à l'une nouvelles fonctions : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique (avec les tangentes particulières et les asymptotes éventuelles).
   - Un exercice à traiter à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple, double ou forte.
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°10 du 08/12/25 au 12/12/25

Exercices Chap. 7

Exercice : Le but de cet exercice est de résoudre **sur** $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(1-x)y' + xy = e^x$

1. a. Résoudre (E) sur $I_1 =]-\infty, 1[$.

b. Résoudre (E) sur $I_2 =]1, +\infty[$.

2. Dans cette question on suppose qu'il existe f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

a. Donner la forme de f sur $\mathbb{R}$.

b. Justifier que f est continue en 1. Que peut-on en déduire ?

c. Justifier que f est dérivable 1. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercices Chap. 8

Exercice 12 :
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

a. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}

b. Soit $f : \mathbb{C}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{2\}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $f(z) = \dfrac{2z+1}{z-1}$. Montrer que l'application f est bijective et déterminer f^{-1}.

c. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, x - 2y)$. L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.

d. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, 3x - y, 2x + y)$.
L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}. Que vaut $f(\mathbb{R}^2)$?

e. Soit $\phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 17 :
Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

Exercices Chap. 9

Exercice 3 :
Déterminer le domaine de définition et courbe représentative des fonctions : $f : x \longmapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \longmapsto \arccos(\cos x)$.

Exercice 6 :
Calculer les valeurs exactes des réels suivants : **b.** $B = \arctan 2 + \arctan 3$

Exercice 8 :
Résoudre les équations suivantes : **a.** $\arccos x = \arcsin(2x)$

Exercice 10 :
Simplifier les expressions suivantes : **a.** $\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$

Exercice 11 :
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition.
À l'aide des théorèmes généraux, déterminer sur quel(s) intervalles(s) f est dérivable. Calculer la dérivée de f sur ces intervalles.

2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

3. a. Démontrer que : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = 2\arctan x$.

b. Déterminer des expressions similaires de $f(x)$ sur les autres intervalles de l'ensemble de définition de f.

4. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode, les résultats de la question 3.

a. Soit $t \in]-\pi, \pi[$. Exprimer $\sin t$ en fonction de $\tan\dfrac{t}{2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\theta = 2\arctan x$.

b. Dans quel intervalle varie θ ? Que vaut x en fonction de θ ?

c. Donner une expression de $f(x)$ en fonction de θ.

d. Retrouver l'expression de $f(x)$ en fonction de x obtenue à la question 3.

Exercice 15 :
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation **:** $\operatorname{ch} x \geq 2$.

Exercice 19 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme : $S = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$, $x \in \mathbb{R}$.

Les 4 exercices suivants sont à travailler seuls :

Exercice 21 : *Fonctions rationnelles.*
Calculer **une** primitive des fonctions suivantes, **en précisant l'ensemble de validité**. **3.** $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

Exercice 23 : *Calcul de primitives.*
Calculer **une** primitive des fonctions suivantes, **en précisant l'ensemble de validité.**

1. $x \longmapsto \arcsin x$ **5.** $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+3)}$ en posant : $u = \sqrt{x}$

Exercice 24 : *Calcul d'intégrales.*
Calculer la valeur des intégrales suivantes. On commencera par **justifier leur existence.**

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\,dx$ **2.** $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+i}\,dx$

Exercice 25 :
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch}(x)\, y' + \operatorname{sh}(x)\, y = 1 + x^2$ et trouver les solutions telles que $y(0) = 1$.