Semaine de colles n°12 du 05/01/26 au 10/01/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Les ensembles ℕ et ℤ

I – Les entiers naturels et le principe de récurrence

- L'ensemble ℕ.
- Raisonnement par récurrence simple, double/avec deux prédécesseurs, forte et finie.

II – Les entiers relatifs

III – Division euclidienne

IV – Nombres premiers

• Suites numériques

I – Généralités

- Définition d'une suite, propriété vraie APCR.
- Opérations sur les suites
- Vocabulaire : suites constantes, stationnaires, majorées, minorées, bornées, monotones, périodiques, extraites.
- La suite (u_n) est bornée ⇔ la suite $(|u_n|)$ est majorée

II – Suites convergentes

- Définition de la convergence d'une suite, unicité de la limite d'une suite convergente **(*)**
- Encadrement d'une suite cv. : Toute suite cv. est bornée et si (u_n) cv. vers $\ell > 0$ alors APCR, $u_n > \frac{\ell}{2} > 0$.
- Suites extraites et convergence, cas de la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vers la même limite ℓ.
  Application : utilisation de suite(s) extraite(s) pour montrer la divergence d'une suite.
- Opérations sur les limites : somme de 2 suites cv. vers 0, produit d'une suite bornée et d'une suite cv. vers 0, cas général.
- Limites et ordre : passage à la limite des inégalités larges, th. de convergence par encadrement (dit des gendarmes).
- Th. de la limite monotone **(*)** (Démonstration faite en classe pour une suite croissante)
- Suites adjacentes : définition et convergence :
  Application aux approximations décimales d'un réel, tout réel est limite d'une suite de rationnels.

NOUVEAU COURS :

• Suites numériques

III – Limites infinies

- Définition, opérations sur les limites infinies, formes indéterminées.
- Limites infinies et ordre, th. de la limite monotone. **(*)** (Démonstration faite pour une suite croissante)

IV – Suites complexes

- Définition, suites bornées, limite, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires.
- Propriétés restant valables pour les suites complexes.

• Suites numériques : Relations de comparaison

- Relation de domination, suite négligeable devant une autre, suites équivalentes : définitions, caractérisations par le quotient $\frac{u_n}{v_n}$, propriétés, compatibilité avec les opérations.
- Exemples de référence :
  - Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$, $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$ ou autre formulation : Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 1$, $n^\alpha = o(x^n)$
  - Si $x > 0$, $x^n = o(n!)$
  - $n! = o(n^n)$
- ⚠ ON NE PEUT PAS AJOUTER DES ÉQUIVALENTS !!!! ON NE PEUT PAS COMPOSER DES ÉQUIVALENTS !!!!
- Lien entre équivalents et la limite d'une suite.

Rq. On pourra s'assurer que les élèves ont appris les définitions avec des petites démonstrations du type :
Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$ **(*)**

- Obtention d'un équivalent à l'aide d'un encadrement.
- Équivalents de références (à savoir redémontrer **(*)**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0. On a :

- $\sin u_n \sim u_n$ et $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n \sim 1$ et $1 - \cos u_n \sim \frac{u_n^2}{2}$
- $\operatorname{sh} u_n \sim u_n$ et $\operatorname{ch} u_n \sim 1$
- $e^{u_n} \sim 1$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\ln(u_n + 1) \sim u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé** : $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n$
- $\arccos(u_n) \sim \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(u_n) \sim u_n$ et $\arctan(u_n) \sim u_n$

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 13 : Suites récurrentes linéaires + Limites et continuité

Déroulement d'une colle

1. Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents
2. Une question parmi celles signalées par (*)
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Programme Colles PCSI 3 – 2025/26

Semaine de colles n°12 du 05/01/26 au 10/01/26

Exercices Chap. 11

Exercice 3 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x_n=\max(u_n, v_n)$ et $y_n=\min(u_n, v_n)$.
Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 5 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6 : ***Théorème de Cesàro.***
On considère (u_n) une suite convergente de limite $\ell\in\mathbb{R}$. On définit (v_n) par : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$.

1. Dans cette question, on suppose que $\ell=0$.

a. Soit $\varepsilon>0$. On fixe un entier N non nul tel que $n\geq N$ implique que $|\,u_n\,|\leq\frac{\varepsilon}{2}$. *(On pensera à justifier l'existence de N)*

Démontrer que pour tout $n\geq N$, $|\,v_n\,|\leq\dfrac{|u_1|+\ldots+|u_{N-1}|}{n}+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

b. En déduire qu'il existe un entier N′ non nul tel que $n\geq N'$ implique que $|v_n|\leq\varepsilon$.
c. Conclure que (v_n) est convergente vers 0.

2. En vous ramenant au cas précédent, démontrer que la propriété est encore valable si ℓ est un réel quelconque.

Exercice 8 :
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 :
On cherche à montrer que la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Par l'absurde, on suppose qu'elle est convergente vers une limite ℓ.
1. En calculant la limite de la suite extraite $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en déduire les valeurs que peut prendre ℓ.
2. Calculer la limite de la suite $(\cos(n+1)+\cos(n-1))_{n\in\mathbb{N}}$ de deux façons différentes, en fonction de ℓ.
3. Conclure.

Exercice 12 : Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes dont on donne le terme général :

1. $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ **2.** $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ **5.** $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ **6.** $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

7. $u_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$, $x\in\mathbb{R}$ **11.** $u_n=2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}$, $\alpha\in\,]0,\pi[$

Exercice 14 : ***Suite définie implicitement.***

⚠ LA MÉTHODE POUR ÉTUDIER LE SENS DE VARIATION D'UNE SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT DOIT ÊTRE CONNUE.

Pour tout entier $n\geq 3$ et pour tout réel $x>0$, on pose : $f_n(x)=x-n\ln x$. On donne : $\ln(2)\approx 0{,}7$.

1. a. Soit $n\geq 3$. Étudier les variations de la fonction f_n sur son ensemble de définition.
b. Soit $n\geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n\in\,]1,2[$ tel que : $f_n(x_n)=0$.

2. a. Soit $n\geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.
En déduire que la suite (x_n) est monotone et donner son sens de monotonie.
b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est convergente.
c. En utilisant que pour tout entier $n\geq 3$, $f_n(x_n)=0$, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=1$.

Exercice 18 :
1. Soit (u_n) une suite à termes positifs, décroissante et convergente vers 0. On définit la suite (S_n) par : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
Montrer que (S_n) est convergente. *Ind. On pourra montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.*

2. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite. *Ind. On pourra utiliser que : $\forall\; k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k}=\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$.*