Semaine de colles n°14 du 19/01/26 au 23/01/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Suites numériques : Relations de comparaison

• Compléments : les suites récurrentes linéaires

I - Suites arithmétiques

II - Suites géométriques : Rappels succincts + Cas de convergence des suites géométriques complexes

III – Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 ou arithmético-géométriques

IV – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Méthode d'étude provisoirement admise)

- Cas des suites complexes et réelles.

⚠ Rq. interrogateurs :
Les suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'ont pas encore été vue en classe.
Elles seront traitées après le chapitre sur la dérivabilité.

NOUVEAU COURS :

• Systèmes linéaires – Méthode du pivot

Rq pour les interrogateurs : le but de ce chapitre est de savoir appliquer l'algorithme de Gauss sur des systèmes de taille raisonnable, avec ou sans paramètre.

I – Généralités

- Équation linéaire, systèmes linéaires, système homogène, compatible/incompatible, système de Cramer.
- Forme de l'ensemble des solutions
- Interprétation géométrique dans le cas de systèmes à deux ou trois équations ou deux ou trois inconnues.

II – Méthode du pivot

- Définition des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire
- Si on applique à un système linéaire (S) une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on obtient un autre système linéaire (S') équivalent à (S), c'est-à-dire ayant le même ensemble de solutions.
- Systèmes échelonnés : définition, pivot, rang du système, relations de compatibilité
- Algorithme de Gauss

• Calcul matriciel

I – Matrices à coefficients dans K

- Définition, opérations : somme, multiplication par un scalaire, propriétés de calcul, combinaison linéaire.
- Décomposition comme combinaison linéaire des matrices élémentaires.
- Transposition, notation A^T.

II – Produit de matrices

- Définition, propriétés de calcul. Le produit matriciel N'EST PAS COMMUTATIF.
- Lignes et colonnes d'une matrice :

• Si X est une matrice colonne alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
• $C_j(AB) = A \times C_j(B)$ et $L_i(AB) = L_i(A) \times B$.

- Écriture matricielle d'un système linéaire

III - Les matrices carrées

- Définition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit matriciel est une loi interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Définition d'une puissance entière de matrice, propriétés.
- **Si A et B commutent,** on peut utiliser : Le binôme de Newton et la formule de Bernoulli $A^n - B^n = \dots$

Exemples : Calcul de J^k où $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **(*)** Calcul de A^k où $A = \begin{pmatrix} 2 & & (5) \\ & \ddots & \\ (5) & & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **(*)**

- Matrices carrées particulières : diagonales, scalaires, triangulaires, symétriques et antisymétriques

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et expression des coefficients diagonaux. **(*)**

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 15 : calcul matriciel (fin : matrices inversibles)

Déroulement d'une colle

1. Deux questions parmi :
   • Une question de cours parmi celles signalées par (*)
   • Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents
   • Étude d'une SRL1 ou SRL2 + calcul éventuel de la limite
2. Résolution d'un système linéaire (avec ou sans paramètre, de taille raisonnable) en utilisant l'algorithme de Gauss
3. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°14 du 19/01/26 au 23/01/26

Exercices Chap. 12

Exercice : ex 8 chap. 11 + 3 chap. 12 :

0. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?

1. Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

2. En déduire que : $\forall\, n \geq 2$ $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n}$.

3. En déduire que u_n est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

4. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = u_n - \ln n$. Montrer que (x_n) est convergente. On note γ cette limite, c'est la *constante d'Euler*.

Exercice 5 :

Déterminer, si elles existent, les limites des suites dont on donne le terme général ci-dessous :

1. $u_n = n \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$ **2.** $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ **3.** $u_n = n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$ **4.** $u_n = \sqrt{n^2 + 36n + 12} - n$

5. $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ **6.** $u_n = n\left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{2n}\right)$ **7.** $u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ **8.** $u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

Exercices Chap. 15

★ **Méthodes à connaitre pour calculer les puissances d'une matrice A :**

• <u>A connaitre :</u> Si $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ alors on a : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $J^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ n^{k-1} J & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (à savoir démontrer)

Si $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors on a : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \mathrm{diag}(\alpha_1{}^p, \dots, \alpha_n{}^p)$

• <u>Utilisation d'un raisonnement par récurrence</u>

Mth : On calcule A^2, A^3, ….
On conjecture l'expression de A^n en fonction de n.
On démontre proprement cette conjecture par récurrence.

• <u>Utilisation de suites récurrentes</u>

Mth : $\boxed{\text{SI}}$ A^2 s'écrit comme combinaison linéaire de A et I_3, on peut :

1) Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_3$
2) Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

• <u>Utilisation du binôme de Newton</u>

Mth : On cherche à écrire A sous la forme A = M + N avec M et N qui **COMMUTENT** et telles que l'on sache calculer leurs puissances successives.
Une des deux matrices est souvent αI_n avec $\alpha \in \mathbb{K}$ car $\alpha\, I_n$ commute avec toutes matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 :

Soit $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

Montrer que : $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $J A J = s(A)\, J$ où $s(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ est la somme de tous les termes de A.