Programme Colles PCSI 3 - 2025/26

Semaine de colles n°16 du 02/02/26 au 06/02/26

Du programme précédent :

• Calcul matriciel

I – Matrices à coefficients dans K

II – Produit de matrices

III - Les matrices carrées

IV - Matrices carrées inversibles

- Définition, cas des matrices ayant une ligne/colonne nulle, cas des matrices diagonales.
- Inverse d'un produit, d'une transposée, d'une puissance entière

V – Opérations élémentaires sur les matrices

- Opérations élémentaires sur les lignes : permutation, dilatation, transvection.
- Matrices des O.E.L, interprétation en termes de produits matriciels.
- Matrices des O.E.L sont inversibles, les O.E.L. préservent l'inversibilité
- Cas des matrices ayant deux lignes/colonnes proportionnelles
- Opérations élémentaires sur les colonnes

VI – Algorithme du pivot de Gauss et caractérisations des matrices inversibles

- Si A est inversible, l'algorithme du pivot de Gauss permet, par une suite finie d'O.E.L., de transformer A en une matrice ayant n pivots / en I_n.
- Caractérisation des matrices inversibles :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :
>
> **1.** A est inversible.
>
> **2.** $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $BA = I_n$
>
> **3.** Le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution (c'est la solution nulle).
>
> **4.** Il existe une suite finie O.E.L. permettant de transformer A en une matrice ayant n pivots.
>
> **5.** Il existe une suite finie O.E.L permettant de transformer A en I_n.

- Inversibilité à droite et à gauche
- Calcul pratique de l'inverse en utilisant l'algorithme de Gauss :

Si A est inversible, il existe une suite finie d'O.E.L. qui transforme A en I_n. La même suite d'O.E.L. transforme I_n en A^{-1}. Idem avec OEL **mais on ne mélange pas les deux**.

- Calcul pratique de l'inverse par résolution de système linéaire :

A est inversible $\Leftrightarrow$ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une unique solution (qui est alors $X = A^{-1}B$)

• Limites et continuité

I – Limite d'une fonction et continuité

- Notion de voisinage
- Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- Unicité de la limite.
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Continuité en un point.

Nouveau cours :

• Limites et continuité

I – Limite d'une fonction et continuité

- Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point.
  Appl : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- Limite ou continuité à droite ou à gauche.

II – Règles de calculs

- Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.

III – Continuité sur un intervalle

- Définition, opérations sur les fonctions continues.
- Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de $\mathbb{R}$ (th des bornes atteintes).
- Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

- Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 17 : Dérivabilité

Déroulement d'une colle

1. Donner un cas parmi les 9 possibles de définition de $f(x) \to L$ quand $x \to a$.
2. Exercice(s) : on pourra commencer par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°16 du 02/02/26 au 06/02/26

Exercices Chap. 15

Méthodes à connaitre : (cf. programme précédent ou fiche méthode)

★ **Comment calculer les puissances d'une matrice A ?**

★ **Comment montrer que A est inversible (sans calculer son inverse)** ?

★ **Comment montrer que A est inversible et calculer A^{-1} ?**

Exercice 2 :
Soit $J = (1)_{1 \le i, j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $J A J = s(A) J$ où $s(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ est la somme de tous les termes de A.

Exercice 12 :
Soit (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles définies par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{6} z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6} x_n + \frac{2}{3} y_n + \frac{1}{6} z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6} x_n + \frac{1}{6} y_n + \frac{2}{3} z_n \end{cases}$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0, puis étudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 20 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente ($\exists p \in \mathbb{N}$, $A^p = 0_n$). Montrer que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 24 :
Soit U et V deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose : $A = U.V^T + I_n$.
1. Calculer A^2 en fonction de A.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible. Quand elle existe, calculer A^{-1}.

Exercice 29 :
Soit A = … et P = … .
1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose : $D = P^{-1} A P$. Déterminer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Application à un système de suites récurrentes.

Exercice 37 :
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Est-ce que cette écriture est unique ?

Exercices Chap. 13

Exercice 4 :
Étudier la limite en 0 des fonctions $f : x \longmapsto \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g : x \longmapsto \frac{a}{x}\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Exercice 9 :
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 :
1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 22 :
Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue.
1. Démontrer que f admet un point fixe c'est-à-dire : $\exists\ c \in [a, b], f(c) = c$.
2. Prouver que ce point fixe est unique dans les deux cas suivants :
a. f est décroissante sur $[a, b]$.
b. f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ avec $0 < k < 1$.

Exercice 26 :
Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell < 1$ en $+\infty$.

Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 29 : *Équation fonctionnelle.*
Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$, est égal à l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$