

Semaine de colles n°17 du 09/02/26 au 13/02/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• **Limites et continuité****I - Limite d'une fonction et continuité**

- ➡ Notion de voisinage
- ➡ Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- ➡ Unicité de la limite.
- ➡ Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- ➡ Continuité en un point.
- ➡ Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point.
Appl : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- ➡ Limite ou continuité à droite ou à gauche.

II - Règles de calculs

- ➡ Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- ➡ Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- ➡ Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- ➡ Théorème de la limite monotone.

III - Continuité sur un intervalle

- ➡ Définition, opérations sur les fonctions continues.
- ➡ Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- ➡ Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de \mathbb{R} (th des bornes atteintes).
- ➡ Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

IV - Extension aux fonctions à valeurs complexes

- ➡ Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

NOUVEAU COURS :• **Dérivation des fonctions à valeurs réelles****I - Fonctions dérivables**

- ➡ Dérivabilité en un point : nombre dérivé, interprétation graphique, dérivabilité à droite/gauche
- ➡ f est dérivable en $a \in I \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$ et ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x - a) \beta + (x - a) \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \text{ (et alors } \beta = f'(a) \text{) } (*)$$
- ➡ Dérivabilité globale, fonction dérivée, « dérivable \Rightarrow continue ».

II - Opérations sur les dérivées

- ➡ Opérations algébriques, composition, dérivation d'une bijection réciproque.

III - Dérivations successives

- ➡ Définition, opérations sur les fonctions n fois dérivable, classe d'une fonction.

Ex. Dérivée n-ième de $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto e^\alpha$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \frac{1}{x+a}$, $x \mapsto \ln|x-a|$ **(*) Résultats**

à connaître et à savoir démontrer (Savoir faire les récurrences même non faites en cours)

- ➡ Formule de Leibniz, ex. calcul de la dérivée n-ième de $x \mapsto (x^2 + 3x + 1)e^{2x}$

IV - Propriétés des fonctions dérivables

- ➡ Extremum local en un point intérieur à I.
- ➡ Théorème de Rolle **(*)**, Th. des accroissements finis **(*)**, Inégalités des accroissements finis.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 18 : Dérivabilité (fin) + Suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) : on pourra commencer par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Exercices Chap. 15Exercice 4 :

Étudier la limite en 0 des fonctions $f: x \mapsto \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g: x \mapsto \frac{a}{x} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Exercice 9 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 :

1. Étudier la continuité sur \mathbb{R} de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 22 :

Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue.

1. Démontrer que f admet un point fixe c'est-à-dire : $\exists c \in [a, b], f(c) = c$.

2. Prouver que ce point fixe est unique dans les deux cas suivants :

a. f est décroissante sur $[a, b]$.

b. f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$ avec $0 < k < 1$.

Exercice 26 :

Soit f continue et positive sur \mathbb{R}^+ . On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell < 1$ en $+\infty$.

Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 29 : Équation fonctionnelle.

Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$, est égal à l'ensemble des homothéties de \mathbb{R}

Exercices Chap. 16Exercice 2 :

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ quand x tend vers a .

2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ quand h tend vers 0.

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

1. $f: x \mapsto (x^2 + 1)e^{2x}$ définie sur \mathbb{R}

2. $f: x \mapsto \sin x e^x$ définie sur \mathbb{R}

4. $f: x \mapsto \frac{1}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/3\}$

5. $f: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Exercice 12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n: x \mapsto x^{n-1} \ln x$ définie sur \mathbb{R}^{+*} . Montrer que : $\forall x > 0, f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f: x \mapsto x^n(1+x)^n$ définie sur \mathbb{R} .

1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, après avoir justifié son existence, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f .

2. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, une autre expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f .

3. En déduire la valeur de : $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 18 : Généralisation du théorème de Rolle sur un intervalle non borné.

Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.

Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ alors il existe un réel c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ind. Utiliser la fonction $g: t \mapsto f\left(\frac{1}{t} + a - 1\right)$ définie sur $]0, 1]$.

Exercice 21 :

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, a+2h]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que : $\exists c \in]a, a+2h[, f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$.

Ind. On pourra introduire : $\varphi: x \mapsto f(x+h) - f(x)$.

Exercice 26 : Formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2.

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$. Montrer que : $\exists c \in]a, b[, f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.