Semaine de colles n°17 du 09/02/26 au 13/02/26

Du programme précédent :

• Limites et continuité

I – Limite d'une fonction et continuité

- Notion de voisinage
- Définition limite (finie ou infinie) en un point (fini ou infini)
- Unicité de la limite.
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Continuité en un point.
- Image d'une suite par une fonction, caractérisation séquentielle de la limite, de la continuité en un point. Appl : comment montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.
- Limite ou continuité à droite ou à gauche.

II – Règles de calculs

- Produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.
- Opérations sur les limites : opérations algébriques et composition.
- Limite et ordre : signe et théorème d'encadrement dit des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.

III – Continuité sur un intervalle

- Définition, opérations sur les fonctions continues.
- Restriction et prolongement de fonctions continues, prolongement par continuité en un point.
- Image d'un intervalle par une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, cas d'une fonction continue sur un **segment** de $\mathbb{R}$ (th des bornes atteintes).
- Bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

- Limite en un point, continuité, traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Nouveau cours :

• Dérivation des fonctions à valeurs réelles

I – Fonctions dérivables

- Dérivabilité en un point : nombre dérivé, interprétation graphique, dérivabilité à droite/gauche
- f est dérivable en $a \in I \Leftrightarrow$ Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\beta + (x-a)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0 \quad (\text{et alors } \beta = f'(a)) \; (*).$$

- Dérivabilité globale, fonction dérivée, « dérivable $\Rightarrow$ continue ».

II – Opérations sur les dérivées

- Opérations algébriques, composition, dérivation d'une bijection réciproque.

III – Dérivations successives

- Définition, opérations sur les fonctions n fois dérivable, classe d'une fonction.

Ex. Dérivée n-ième de $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto e^{\alpha}$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$, $x \longmapsto \ln|x-a|$ ***(*) Résultats à connaitre et à savoir démontrer (Savoir faire les récurrences même non faites en cours)***

- Formule de Leibniz, ex. calcul de la dérivée n-ième de $x \longmapsto (x^2 + 3x + 1)e^{2x}$

IV – Propriétés des fonctions dérivables

- Extremum local en un point intérieur à I.
- Théorème de Rolle ***(*)***, Th. des accroissements finis ***(*)***, Inégalités des accroissements finis.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 18 : Dérivabilité (fin) + Suites vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) : on pourra commencer par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°17 du 09/02/26 au 13/02/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 15

Exercice 4 :

Étudier la limite en 0 des fonctions $f : x \longmapsto \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g : x \longmapsto \frac{a}{x}\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Exercice 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1, telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 :

1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 22 :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue.
1. Démontrer que f admet un point fixe c'est-à-dire : $\exists\ c \in [a, b], f(c) = c$.
2. Prouver que ce point fixe est unique dans les deux cas suivants :
- **a.** f est décroissante sur $[a, b]$.
- **b.** f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ avec $0 < k < 1$.

Exercice 26 :

Soit f continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell < 1$ en $+\infty$.

Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 29 : *Équation fonctionnelle.*

Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$, est égal à l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$

Exercices Chap. 16

Exercice 2 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\frac{x f(a) - a f(x)}{x - a}$ quand x tend vers a.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ quand h tend vers 0.

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto (x^2 + 1)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ **2.** $f : x \longmapsto \sin x\, e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

4. $f : x \longmapsto \frac{1}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1/3\}$ **5.** $f : x \longmapsto \frac{1}{1 - x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$

Exercice 12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f : x \longmapsto x^n(1 + x)^n$ définie sur $\mathbb{R}$.
1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, après avoir justifié son existence, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, une autre expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

3. En déduire la valeur de : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n : x \longmapsto x^{n-1} \ln x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 18 : *Généralisation du théorème de Rolle sur un intervalle non borné.*
Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.
Montrer que si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ alors il existe un réel c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ind. Utiliser la fonction $g : t \longmapsto f\left(\frac{1}{t} + a - 1\right)$ *définie sur* $]0, 1]$.

Exercice 21 :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a + 2h]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que : $\exists\, c \in\ ]a, a + 2h[,\ f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$.

__Ind.__ On pourra introduire : $\varphi : x \longmapsto f(x + h) - f(x)$.

Exercice 26 : *Formule de Taylor Lagrange à l'ordre* 2.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b],\mathbb{R})$ avec $a < b$. Montrer que : $\exists\, c \in\ ]a, b[,\ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.