

Semaine de colles n°18 du 16/02/26 au 20/02/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Limites et continuité• Dérivation des fonctions à valeurs réellesI - Fonctions dérivables

➡ Dérivabilité en un point : nombre dérivé, interprétation graphique, dérivabilité à droite/gauche

➡ f est dérivable en $a \in I \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$ et ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)\beta + (x-a)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \quad (\text{et alors } \beta = f'(a)) \quad (*)$$

➡ Dérivabilité globale, fonction dérivée, « dérivable $\Rightarrow$ continue ».

II - Opérations sur les dérivées

➡ Opérations algébriques, composition, dérivation d'une bijection réciproque.

III - Dérivations successives

➡ Définition, opérations sur les fonctions n fois dérivable, classe d'une fonction.

Ex. Dérivée n -ième de $x \mapsto x^a, x \mapsto x^n, x \mapsto e^x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \frac{1}{x+a}, x \mapsto \ln|x-a|$ (*) **Résultats**

à connaître et à savoir démontrer (Savoir faire les récurrences même non faites en cours)

➡ Formule de Leibniz, ex. calcul de la dérivée n -ième de $x \mapsto (x^2 + 3x + 1)e^{2x}$

IV - Propriétés des fonctions dérivables

➡ Extremum local en un point intérieur à I .

➡ Théorème de Rolle (*), Th. des accroissements finis (*), Inégalités des accroissements finis.

NOUVEAU COURS :• Dérivation des fonctions à valeurs réellesIV - Propriétés des fonctions dérivables

➡ Obtention de la dérivabilité par limite de la dérivée.

➡ Sens de variations pour une fonction dérivable sur un intervalle et cas de la stricte monotonie.

V - Fonctions convexes

➡ Paramétrage d'un segment, définition d'une fonction convexe/concave

➡ Position de la courbe représentatives par rapports à ses cordes

➡ Cas des fonctions dérivables, position de la courbe représentative par rapport à ses tangentes

➡ Cas des fonctions deux fois dérivable

➡ Inégalités classiques de convexité :

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u \quad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x. \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

VI - Extension aux fonctions à valeurs complexes

⚠ Les th. de Rolle et des accroissements finis ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

• Compléments de cours : suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ I - Généralités

➡ Si I intervalle $\mathbb{R}$ stable par f alors le système $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ définit une unique suite (u_n) .

➡ Valeurs éventuelles de la limite si f continue sur I (point(s) fixe(s) de f).

II - Cas d'une fonction contractante

➡ Définition fonction contractante (k -lipschitzienne avec $0 < k < 1$), unicité du point fixe (s'il existe) et convergence de (u_n) . Cette propriété est à redémontrer proprement à chaque utilisation.

➡ Utilisation l'inégalité des accroissements finis pour montrer qu'une fonction est contractante.

III - Cas d'une fonction monotone

➡ Si f est croissante alors (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$

➡ Si f est décroissante alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 19 : Espaces vectoriels

Déroulement d'une colle

1. Une question parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) : on pourra commencer par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraîne une note < 10 .

Exercices Chap. 16Exercice 2 :

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\frac{x f(a) - a f(x)}{x - a}$ quand x tend vers a .
2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'existence et la valeur de la limite de $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ quand h tend vers 0.

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, si elle existe, la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

1. $f: x \mapsto (x^2 + 1)e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ 2. $f: x \mapsto \sin x e^x$ définie sur $\mathbb{R}$
4. $f: x \mapsto \frac{1}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ 5. $f: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Exercice 12 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f: x \mapsto x^n(1+x)^n$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. En utilisant la formule de Leibniz, déterminer, après avoir justifié son existence, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f .
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, une autre expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f .
3. En déduire la valeur de : $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n: x \mapsto x^{n-1} \ln x$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\forall x > 0, f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

Exercice 18 : Généralisation du théorème de Rolle sur un intervalle non borné.

Soit a un réel et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$.

Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$ alors il existe un réel c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ind. Utiliser la fonction $g: t \mapsto f\left(\frac{1}{t} + a - 1\right)$ définie sur $]0, 1]$.

Exercice 21 :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, a+2h]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que : $\exists c \in]a, a+2h[, f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$.

Ind. On pourra introduire : $\varphi: x \mapsto f(x+h) - f(x)$.

Exercice 26 : Formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$. Montrer que : $\exists c \in]a, b[, f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.

Exercice 29 : Inégalités de convexité.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq -1, (1+x)^n \geq 1 + nx$.
2. On considère p et q deux réels, strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$.
3. a. Montrer que $f:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe sur son ensemble de définition.
- b. En déduire que : $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

Exercices Chap. 16 - Bis - Suites récurrentes

Exercice 2 : Étudier, selon la valeur de u_0 , la nature des suites suivantes :

$$1. \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n} \end{cases} \qquad 3. \begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} u_n^2 \end{cases}$$