

Semaine de colles n°19 du 09/03/26 au 13/03/26

**DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :**• **Dérivation des fonctions à valeurs réelles****I - Fonctions dérivables****II - Opérations sur les dérivées****III - Dérivations successives****IV - Propriétés des fonctions dérivables**

- ➔ Extremum local en un point intérieur à I.
- ➔ Théorème de Rolle, Th. des accroissements finis, Inégalités des accroissements finis.
- ➔ Obtention de la dérivabilité par limite de la dérivée.
- ➔ Sens de variations pour une fonction dérivable sur un intervalle et cas de la stricte monotonie.

**V - Fonctions convexes**

- ➔ Paramétrage d'un segment, définition d'une fonction convexe/concave
- ➔ Position de la courbe représentatives par rapports à ses cordes
- ➔ Cas des fonctions dérivables, position de la courbe représentative par rapport à ses tangentes
- ➔ Cas des fonctions deux fois dérivable
- ➔ Inégalités classiques de convexité :

$$\forall u \in ]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u \quad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x. \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

**VI - Extension aux fonctions à valeurs complexes**

- ⚠ Les th. de Rolle et des accroissements finis ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

• **Compléments de cours : suites vérifiant une relation de récurrence du type  $u_{n+1} = f(u_n)$** **I - Généralités**

- ➔ Si I intervalle  $\mathbb{R}$  stable par f alors le système  $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  définit une unique suite  $(u_n)$ .
- ➔ Valeurs éventuelles de la limite si f continue sur I (point(s) fixe(s) de f).

**II - Cas d'une fonction contractante**

- ➔ Définition fonction contractante (k-lipschitzienne avec  $0 < k < 1$ ), unicité du point fixe (s'il existe) et convergence de  $(u_n)$ . Cette propriété est à redémontrer proprement à chaque utilisation.
- ➔ Utilisation l'inégalité des accroissements finis pour montrer qu'une fonction est contractante.

**III - Cas d'une fonction monotone**

- ➔ Si f est croissante alors  $(u_n)$  est monotone, et son sens de monotonie est donné par le signe de  $u_1 - u_0$
- ➔ Si f est décroissante alors  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones de monotonies contraires.

**NOUVEAU COURS :**• **Espaces vectoriels et familles de vecteurs****I - Espace vectoriel sur K**

- ➔ Définition d'un  $\mathbb{K}$ -ev où  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , unicité de  $O_E$  et de l'opposé d'un vecteur.

Ex. de ref. Ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{F}(X, E)$  où  $E$  ev,  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$ .

- ➔ Le produit cartésien d'un nombre fini de  $\mathbb{K}$ -ev est un  $\mathbb{K}$ -ev.

Ex. pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{K}^n$  est un  $\mathbb{K}$ -ev.

- ➔ Règles de calcul dans les espaces vectoriels.
- ➔ Définition d'une combinaison linéaire, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, les ev. sont stables par combinaison linéaire.

**II - Sous-espaces vectoriels**

- ➔ Définition, caractérisation et exemples de sev des ev de références.
- ➔ Définition du sev. engendré par une famille finie de vecteurs, l'espace  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .  
Une question de cours : donner la définition de  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  et montrer que c'est un sev de E (\*)
- ➔ Toute intersection de sev est un sev.
- ➔ Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe et caractérisations.
- ➔ Cas des sous-espaces supplémentaires, notation  $E = F \oplus G$ , caractérisations.

Ex. fait dans le cours :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\} \text{ et } G = \text{vect}((1, 1, 1)) \text{ sont deux sev supplémentaires de } \mathbb{R}^3. (*)$$

**À savoir démontrer (cf. chapitres précédents) (\*)**

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev supplémentaires dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

(\*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 20 : Espaces vectoriels (fin : famille de vecteurs)

Déroulement d'une colle

1. Montrer sur un exemple que F est un sev de E (en utilisant une caractérisation des sev ou en l'écrivant comme sous espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs)  
Ou Une question signalée par (\*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Exercices Chap. 16**Exercice 18 :** Généralisation du théorème de Rolle sur un intervalle non borné.

Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction définie et continue sur  $[a, +\infty[$  et dérivable sur  $]a, +\infty[$ .

Montrer que si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}$  alors il existe un réel  $c$  dans  $]a, +\infty[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

*Ind.* Utiliser la fonction  $g : t \mapsto f\left(\frac{1}{t} + a - 1\right)$  définie sur  $]0, 1[$ .

**Exercice 21 :**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $[a, a + 2h]$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Montrer que :  $\exists c \in ]a, a + 2h[$ ,  $f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c)$ .

*Ind.* On pourra introduire :  $\varphi : x \mapsto f(x + h) - f(x)$ .

**Exercice 26 :** Formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2.

Soit  $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  avec  $a < b$ . Montrer que :  $\exists c \in ]a, b[$ ,  $f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f''(c)$ .

**Exercice 29 :** Inégalités de convexité.

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \geq -1$ ,  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

2. On considère  $p$  et  $q$  deux réels, strictement supérieurs à 1 tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Montrer que :  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ ,  $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ .

3. a. Montrer que  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = -\ln(\ln x)$  est convexe sur son ensemble de définition.

b. En déduire que :  $\forall (x, y) \in ]1, +\infty[^2$ ,  $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$ .

Exercices Chap. 16 - Bis - Suites récurrentes

**Exercice 2 :** Étudier, selon la valeur de  $u_0$ , la nature des suites suivantes :

$$1. \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2 \end{cases}$$

Exercices Chap. 17**Exercice 3 :**

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ ? Justifier votre réponse.

1.  $A = \{(x, x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

2.  $B = \{(x, y, z), x^2 - y^2 = 0\}$ .

3.  $C = \{(x, y, z), x + y = 0 \text{ et } x + 2y + 3z = 0\}$ .

**Exercice 4 :**

Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$  et  $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer  $F \cap G$ .

**Exercice 8 :**

Soit  $A$  une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 12 :**

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  espace vectoriel.

1. A-t-on  $F \cup G$  sous espace vectoriel de  $E$ ?

2. Montrer que :  $F \cup G$  sous espace vectoriel de  $E \Leftrightarrow F \subset G$  ou  $G \subset F$

**Exercice 15 :**

On considère :  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((1, 2, 2))$ . Montrer que :  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .

**Exercice 17 :**

Soit  $F = \{f \text{ de classe } C^1 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ telle que } f(0) = f'(0) = 0\}$  et  $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .