

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :**• Espaces vectoriels et familles de vecteurs****I - Espace vectoriel sur K**

➔ Définition d'un K -ev où K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , unicité de O_E et de l'opposé d'un vecteur.

Ex. de ref. Ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, \mathbb{R} , \mathbb{C} , $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, E)$ où E ev, \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n .

➔ Le produit cartésien d'un nombre fini de K -ev est un K -ev.

Ex. pour $n \in \mathbb{N}^*$, \mathbb{K}^n est un K -ev.

➔ Règles de calcul dans les espaces vectoriels.

➔ Définition d'une combinaison linéaire, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, les ev. sont stables par combinaison linéaire.

II - Sous-espaces vectoriels

➔ Définition, caractérisation et exemples de sev des ev de références.

➔ Définition du sev. engendré par une famille finie de vecteurs, l'espace $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs x_1, \dots, x_n .

Une question de cours : donner la définition de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et montrer que c'est un sev de E (*)

➔ Toute intersection de sev est un sev.

➔ Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe et caractérisations.

➔ Cas des sous-espaces supplémentaires, notation $E = F \oplus G$, caractérisations.

Ex. fait dans le cours :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, 1, 1))$ sont deux sev supplémentaires de \mathbb{R}^3 . (*)

À savoir démontrer (cf. chapitres précédents) (*)

- L'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sev supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

- L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

NOUVEAU COURS :**III - Familles de vecteurs**

➔ Familles génératrices de F sev de E : e.v. de dimension finie (existence d'une famille génératrice finie). Ajout et suppression de vecteurs dans une famille génératrice de F .

➔ Familles libres/liées :

Définition, caractérisation d'une famille libre par décomposition unique des vecteurs de $\text{Vect}((x_i)_{1 \leq i \leq n})$

Caractérisation des familles liées : l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Famille libre à 1 ou 2 éléments, famille contenant O_E , contenant deux vecteurs colinéaires, ...

➔ Si la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre alors pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ et $\text{Vect}(x_{k+1}, \dots, x_n)$ sont en somme directe.

➔ Dans un espace vectoriel de dimension finie, le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice du même espace.

IV - Bases et dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

➔ Bases d'un espace vectoriel : définition, caractérisation par existence et unicité de la décomposition, coordonnées dans une base.

Ex. Déterminer une base d'ev tels que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z = 0\}$ ou/et $\{(a - b, a + 2b, b - a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ (*)

➔ Caractérisation d'une base comme famille libre maximale ou génératrice minimale.

➔ Soit F, G sev de E , de bases respectives B_1 et B_2 .

On a : $E = F \oplus G \Leftrightarrow B = (B_1, B_2)$ base de E (base adaptée à la somme directe)

➔ Existence de bases : Th. de la base extraite, th. de la base incomplète.

➔ Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples : \mathbb{K}^n et $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et leur base canonique.

➔ Si E de dimension n alors : Toute famille libre de E est finie et a **au plus** n éléments
Et toute famille libre de E de n éléments est une base de E .

➔ Si E de dimension n alors : Toute famille génératrice de E a **au moins** n éléments
Et toute famille génératrice de E de n éléments est une base de E .

V - Sous-espaces vectoriels en dimension finie

➔ Dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.

➔ Existence de sous-espace supplémentaire d'un sev donné, dimension d'un supplémentaire.

➔ Formule de Grassmann (*)

➔ Caractérisation de s.e.v. supplémentaires dans un e.v. de dimension finie.

➔ Rang d'une famille de vecteurs, caractérisation des familles libres et génératrices à l'aide du rang. (*)

➔ Détermination pratique du rang d'une famille de vecteurs de K^n par la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à une famille étagée + Présentation pratique sous forme de matricielle.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 21 : Polynômes

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*) ou une question très proche.
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Exercices Chap. 17Exercice 3 :

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ? Justifier votre réponse.

1. $A = \{(x, x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. $B = \{(x, y, z), x^2 - y^2 = 0\}$.
3. $C = \{(x, y, z), x + y = 0 \text{ et } x + 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 4 :

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 et déterminer $F \cap G$.

Exercice 8 :

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $E = \{M \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 12 :

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E espace vectoriel.

1. A-t-on $F \cup G$ sous espace vectoriel de E ?
2. Montrer que : $F \cup G$ sous espace vectoriel de E $\Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice 15 :

On considère : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 2, 2))$. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 17 :

Soit $F = \{f \text{ de classe } C^1 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ telle que } f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

Montrer que F et G sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^1 .

Exercice 19 :

Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ou liée ?

1. $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans \mathbb{R}^3 .
2. $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans \mathbb{R}^3 .
3. $f : x \mapsto \cos^2 x$, $g : x \mapsto \cos(2x)$ et $h : x \mapsto 1$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto e^x$ et $h : x \mapsto xe^x$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5. (u_n) et (v_n) avec : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$ et $v_n = n2^n$, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 23 :

Soit x_1, x_2, \dots, x_n réels tels que : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = |x - x_k|$.

Montrer que (f_1, f_2, \dots, f_n) est libre dans $C(\mathbb{R})$.

Exercice 34 :

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0 \text{ et } 3x - 2y + 2z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x + y - 2z = 0\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Déterminer sa dimension.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Déterminer sa dimension.
3. Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 36 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

1. On considère H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.
2. Soit H un hyperplan de E et $u \in E$ tel que $u \notin H$. Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 37 :

2. Dans \mathbb{R}^3 , on pose : $\vec{u} = (a, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, a, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ suivant les valeurs de a.

Exercice 39 :

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}, x \mapsto \text{ch } x, x \mapsto \text{sh } x)$ dans $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.