

Semaine de colles n°21 du 23/03/26 au 27/03/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :**• Espaces vectoriels et familles de vecteurs****I - Espace vectoriel sur K****II - Sous-espaces vectoriels****III - Familles de vecteurs**

- ➔ Familles génératrices de F sev de E : e.v. de dimension finie (existence d'une famille génératrice finie).
Ajout et suppression de vecteurs dans une famille génératrice de F.
- ➔ Familles libres/liées :
Définition, caractérisation d'une famille libre par décomposition unique des vecteurs de $\text{Vect}((x_i)_{1 \leq i \leq n})$
Caractérisation des familles liées : l'un au moins des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
Famille libre à 1 ou 2 éléments, famille contenant 0_E , contenant deux vecteurs colinéaires, ...
- ➔ Si la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre alors pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ et $\text{Vect}(x_{k+1}, \dots, x_n)$ sont en somme directe.
- ➔ Dans un espace vectoriel de dimension finie, le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à celui d'une famille génératrice du même espace.

IV - Bases et dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- ➔ Bases d'un espace vectoriel : définition, caractérisation par existence et unicité de la décomposition, coordonnées dans une base.
- Ex. Déterminer une base d'ev tels que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - 2y + z = 0\}$ ou/et $\{(a - b, a + 2b, b - a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ (*)
- ➔ Caractérisation d'une base comme famille libre maximale ou génératrice minimale.
- ➔ Soit F, G sev de E, de bases respectives B_1 et B_2 .
On a : $E = F \oplus G \Leftrightarrow B = (B_1, B_2)$ base de E (base adaptée à la somme directe)
- ➔ Existence de bases : Th. de la base extraite, th. de la base incomplète.
- ➔ Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples : \mathbb{K}^n et $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et leur base canonique.
- ➔ Si E de dimension n alors : Toute famille libre de E est finie et a **au plus** n éléments
Et toute famille libre de E de n éléments est une base de E.
- ➔ Si E de dimension n alors : Toute famille génératrice de E a **au moins** n éléments
Et toute famille génératrice de E de n éléments est une base de E.

V - Sous-espaces vectoriels en dimension finie

- ➔ Dimension d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- ➔ Existence de sous-espace supplémentaire d'un sev donné, dimension d'un supplémentaire.
- ➔ Formule de Grassmann (*)
- ➔ Caractérisation de s.e.v. supplémentaires dans un e.v. de dimension finie.
- ➔ Rang d'une famille de vecteurs, caractérisation des familles libres et génératrices à l'aide du rang. (**)
- ➔ Détermination pratique du rang d'une famille de vecteurs de \mathbb{K}^n par la méthode du pivot de Gauss pour se ramener à une famille étagée + Présentation pratique sous forme de matricielle.

NOUVEAU COURS :**• Polynômes****I - L'ensemble $K[X]$ où $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}**

- ➔ Définition formelle, degré, coefficient dominant, polynômes unitaires.
- ➔ Opérations sur l'ensemble des polynômes : structure d'ev., multiplication de deux polynômes
Formule du binôme de Newton et formule de Bernoulli.
- ➔ Notation usuelle des polynômes.
- ➔ $K_n[X]$ sev. de $K[X]$ de base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.
- ➔ Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre. (**)
- ➔ Composition de deux polynômes.
- ➔ Fonction polynomiale associée à un polynôme.

II - Dérivation dans $K[X]$

- ➔ Définition, propriétés, expression de la dérivée $k^{\text{ième}}$ d'un polynôme.
- ➔ Formule de Leibniz et formule de Taylor pour les polynômes.

III - Divisibilité dans $K[X]$

- ➔ Multiples et diviseurs d'un polynôme, division euclidienne, exemple pratique.

IV - Racines d'un polynôme

- ➔ Définition par divisibilité et caractérisation.
- ➔ Tout polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines distinctes.
Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes, c'est le polynôme nul.
Ex. Trouver tous les polynômes P vérifiant : $P(X+1) = P(X)$. (**)

IV - Racines d'un polynôme

- ➔ Ordre de multiplicité d'une racine : définition par divisibilité et caractérisation.
- ➔ Un polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines, comptées avec leur multiplicité.
Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins $n + 1$ racines, comptées avec leur multiplicité, c'est le polynôme nul.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 22 : Polynômes (fin : factorisation)

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*) ou une question très proche.
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur. La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Exercices Chap. 17Exercice 19 :

Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ou liée ?

- $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans \mathbb{R}^3 .
- $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, -1, 2)$ dans \mathbb{R}^3 .
- $f: x \mapsto \cos^2 x$, $g: x \mapsto \cos(2x)$ et $h: x \mapsto 1$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- $f: x \mapsto x$, $g: x \mapsto e^x$ et $h: x \mapsto xe^x$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- (u_n) et (v_n) avec : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $v_n = n2^n$, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 23 :

Soit x_1, x_2, \dots, x_n réels tels que : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = |x - x_k|$.

Montrer que (f_1, f_2, \dots, f_n) est libre dans $C(\mathbb{R})$.

Exercice 34 :

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose : $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0 \text{ et } 3x - 2y + 2z = 0 \}$ et $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 4x + y - 2z = 0 \}$

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Déterminer sa dimension.
- Montrer que G est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Déterminer sa dimension.
- Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 36 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

- On considère H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.
- Soit H un hyperplan de E et $u \in E$ tel que $u \notin H$. Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 37 :

2. Dans \mathbb{R}^3 , on pose : $\vec{u} = (a, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, a, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ suivant les valeurs de a .

Exercice 39 :

Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}, x \mapsto \text{ch } x, x \mapsto \text{sh } x)$ dans $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercices Chap. 18Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P_n = (X^2 + 1)^{2n} - (X^2 - 1)^{2n}$.

Exercice 4 :

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 7 :

On considère les ensembles : $E_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \tilde{P}(2) = 0\}$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X], \tilde{P}(1) = 1\}$.

Ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$?

Si oui, sont-ils de dimensions finies ? Si oui, en donner une base.

Exercice 8 :

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. On considère : $F = \{P \in E, P(1) = P'(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(X^2, X(X+1), (X+1)^2)$.

- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Donner une base de F et une base de G.
- A-t-on $E = F \oplus G$?

Exercice 13 : Polynômes interpolateurs de Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(n+1)$ réels tels que : $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

- Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Rq. On peut commencer par le cas $n = 2$ pour comprendre.

- Montrer que (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 15 :

Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

- $A = X^n$ par $B = X^2 - 3X + 2$ avec $n \geq 2$
- $A = X^n$ par $B = X(X-1)^2$ avec $n \geq 3$
- $A = (X \cos \theta + \sin \theta)^n$ par $B = X^2 + 1$ avec $n \geq 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 :

Soit $n \geq 1$ et $P = nX^{n+1} - (n+1)aX^n + a^{n+1}$ où a est un réel fixé. Montrer que P est divisible par $(X-a)^2$ et donner le quotient.

Exercice 23 : Une application aux matrices.

On considère : $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
- Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$.
- En déduire, A^n pour $n \geq 2$.

Exercice 28 :

Montrer que pour tout n entier naturel, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$ n'a pas de racine multiple.

Exercice 33 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 2$. On notera \tilde{P} sa fonction polynomiale associée.

- Montrer que si P est scindé à racines simples sur \mathbb{R} alors il en est de même pour son polynôme dérivé P'.
- Montrer que si P est scindé sur \mathbb{R} , son polynôme dérivé P' est aussi scindé sur \mathbb{R} .