Semaine de colles n°23 du 06/04/26 au 10/04/26

Du programme précédent :

• Polynômes

I – L'ensemble K [X] où K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

II – Dérivation dans K[X]

III – Divisibilité dans K[X]

IV – Racines d'un polynôme

- Ordre de multiplicité d'une racine : définition par divisibilité et caractérisation.
- Un polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines, comptées avec leur multiplicité.

Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins n + 1 racines, comptées avec leur multiplicité, c'est le polynôme nul.

- Ordre de multiplicité d'une racine : définition par divisibilité et caractérisation.
- Un polynôme de degré $n \geq 0$ possède au plus n racines, comptées avec leur multiplicité.

Si un polynôme de degré $\leq n$ admet au moins n + 1 racines, comptées avec leur multiplicité, c'est le polynôme nul.

V – Factorisation dans $\mathbb{C}$[X] et $\mathbb{R}$[X]

- Polynômes irréductibles, th. de D'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles de $\mathbb{C}$[X] et de $\mathbb{R}$[X].
- Factorisation dans $\mathbb{C}$[X] et dans $\mathbb{R}$[X].
- Ex. de factorisation dans $\mathbb{R}$[X] et $\mathbb{C}$[X] : $X^n - 1$ **(*)**

VI – Somme et produit des racines d'un polynôme

- Savoir retrouver les relations coefficients/racines pour un polynôme de degré 3.
- Somme et produit des racines d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ de degré $n \geq 1$.

• Dénombrements

I – Ensembles finis

- Intervalles de $\mathbb{N}$, conditions sur p et n lorsqu'il existe une injection/surjection/bijection $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.
- Définition d'un ensemble fini non vide et par convention, l'ensemble vide est fini.
- Parties d'un ensemble fini, cardinal d'une partie.
- Applications entre deux ensembles finis : Cardinal de $\mathcal{F}$(E, F), conditions sur Card E et Card F lorsqu'il existe une injection/surjection/bijection E sur F.

Si E et F finis tels que **Card E = Card F** et $f : E \longrightarrow F$ une application alors :

f injective ⇔ f surjective ⇔ f bijective.

II – Opérations sur les ensembles finis

- Cardinal d'une réunion disjointe ou non, d'un produit cartésien.

Rq. interrogateurs : La formule du crible est H.P.

- Définition d'une partition d'un ensemble, lien avec les cardinaux.
- Parties d'un ensemble fini : nombre total de parties **(*)** Dem. par récurrence.

III – Outils pour le dénombrement

- p-listes, p-arrangements, permutations.

Applications : dénombrement des injections et des bijections de E dans F.

- p-combinaisons, nombre de parties de cardinal p d'un ensemble E fini.
- Un exemple classique : les anagrammes **(*)** A savoir expliquer sur des exemples.

Nouveau cours :

• Dénombrements

IV – Propriétés des coefficients binomiaux

- Démonstrations combinatoires : Symétrie, somme, triangle de Pascal, Binôme de Newton.

• Probabilités sur un univers fini

I – Expérience aléatoire, univers et événements

- Définitions, événements élémentaires, événements contraires, événement « A et B », événement « A ou B », Événements incompatibles, système complet d'événements.

II – Probabilités sur un univers fini

- Définition d'une probabilité.
- Probabilité d'une union d'événements deux à deux incompatibles.
- Distribution de probabilité sur Ω, détermination d'une probabilité par les images des événements élémentaires.
- Évènements équiprobables, probabilité uniforme.
- Propriétés d'une probabilité :

Prop.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On a :

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \setminus B) = P(A \cap \overline{B}) = P(C_A B) = P(A) - P(A \cap B)$

2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3. *Croissance.* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

4. *Réunion.* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*Formule de Poincaré*)

Rq. la formule du crible est HP mais il faut savoir retrouver la formule donnant $P(A \cup B \cup C)$.

III – Probabilités conditionnelles

- Définition d'une probabilité conditionnelle, l'application P_B est une probabilité sur Ω.
- Formule des probabilités composées. **(*)**
- Formule des probabilités totales. **(*)**
- Formule de Bayes

IV – Événements indépendants

- Couple d'événements indépendants, si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Famille d'événements (mutuellement) indépendants
- Si $n \geq 3$, l'indépendance des A_i deux à deux n'entraine pas leur indépendance (mutuelle).

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 24 : Applications linéaires.

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions parmi :
   - Citer une définition / propriété du chapitre « Probabilités » :

   Par exemple : Définition d'un SCE, d'une probabilité, couple/famille d'événements indépendants, formule des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes (complètes avec leurs hypothèses !)
   - Une ou deux questions de dénombrements faciles (cf. ex 18)
   - Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur.
   La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°23 du 06/04/26 au 10/04/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 18

Exercice 33 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 2$. On notera $\tilde{P}$ sa fonction polynomiale associée.

1. Montrer que si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ alors il en est de même pour son polynôme dérivé P'.

2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, son polynôme dérivé P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38 :

On considère le polynôme : $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la fonction cotangente définie par : $\cotan : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

3. Démontrer que P_n admet $n-1$ racines imaginaires pures, deux à deux distinctes. En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

4. Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème : *Les polynômes de Tchebychev.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, noté P_n, tel que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

3. a. Calculer P_2, P_3 et P_4.

b. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n. *On demande de démontrer proprement vos résultats !*

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de P_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.

On pourra remarquer que : $\forall\, x \in [-1, 1]$, $\exists\, !\, \theta \in [0, \pi]$, $x = \cos\theta$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien de racines de P_n appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$? Que pouvez-vous en déduire ?

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercices Chap. 19

Exercice 14 : *Formule de Vandermonde.*

Soit n, n_1 et n_2 trois entiers naturels tels que : $n \leq n_1$ et $n \leq n_2$. Montrer de **façon ensembliste** que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$.

Exercice 16 : *Applications strictement croissantes.*

Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 18 : p-listes, p-arrangements ou p-combinaison ?

1. Nombre de codes possibles pour une carte bleue ?
2. Au loto, on tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
3. Au tiercé, une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
4. Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ?
Rq. Au plus un manteau par patère.
5. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire simultanément 3. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
6. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire successivement 3 sans remise. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
7. Combien de pièces contient un jeu de dominos?
8. Quel est le nombre de façons de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI 3 ?
9. Quel est le nombre de façons de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI 3 si l'on impose un garçon et une fille ?
10. Quel est le nombre de plaques d'immatriculation possibles ?
Rq. Une plaque d'immatriculation est composée de « 2 lettres – 3 chiffres – 2 lettres »
11. Quel est le nombre de plaques d'immatriculation possibles dont tous les chiffres et les lettres sont deux à deux distincts ?
12. Quel est le nombre d'anagrammes du mot PREPA ?
13. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
14. Un QCM, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions qui ont chacune 4 réponses possibles.
De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 21 :
Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer avec un jeu de 52 cartes telles que :
1. elles contiennent exactement un roi ?
2. elles contiennent au moins un roi ?
3. elles contiennent le roi de trèfle et au moins 2 piques ?
4. elles contiennent 6 cartes d'une couleur, 4 cartes d'une autre et 3 cartes d'une troisième ?

Exercice 25 :
Combien y a –t-il de d'entiers dont l'écriture comporte exactement n chiffres ($n \geq 3$) et comportant exactement deux chiffres 8 ?

Exercices Chap. 20

Exercice 4 :
Soit $(N, N_g, n, k) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Un commerçant met en vente N tickets dont seulement N_g sont gagnants.
1. Si un joueur achète n billets, quelle est la probabilité d'avoir acheté exactement k billets gagnants ?
2. Si un joueur achète n billets, quelle probabilité d'avoir acheté au moins un billet gagnant ?

Exercice 5 :
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geq 3$. On les tire toutes successivement et sans remise.
1. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 dans cet ordre mais pas forcément à la suite.
2. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 dans cet ordre et à la suite.
3. Déterminer la probabilité qu'on ait tiré 1, 2, 3 à la suite mais pas nécessairement dans l'ordre.

Exercice 10 :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une suite d'épreuves comme suit : lorsqu'on tire une boule d'une certaine couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute dans l'urne, k autres boules de la même couleur. On effectue n tirages successifs, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au n-ième tirage est indépendante de n.

Exercice 11 :
Un automobiliste a le choix entre deux routes A et B pour se rendre à son travail. Le premier jour où il s'y rend, il tire au sort la route qu'il emprunte avec la probabilité 1/2 pour chaque route ; ensuite, s'il est pris dans un embouteillage sur la route empruntée le n-ième jour, il choisit l'autre route le lendemain mais s'il n'est pas pris dans un embouteillage sur la route empruntée le n-ième jour, il choisit la même le lendemain.
On suppose que la probabilité d'être pris dans un embouteillage sur la route A est égale à $a \in\,]0, 1]$ et sur la route B est $b \in\,]0, 1]$.
Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité, notée p_n, que l'automobiliste emprunte la route A le n-ième jour.
Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 13 :
On considère une famille ayant n enfants.
Soit A l'événement « la famille a au moins une fille et au moins un garçon » et B l'événement « la famille a au plus une fille ».
1. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?