

Semaine de colles n°24 du 13/04/26 au 17/04/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• **Dénombrements****I - Ensembles finis****II - Opérations sur les ensembles finis****III - Outils pour le dénombrement****IV - Propriétés des coefficients binomiaux**• **Probabilités sur un univers fini****I - Expérience aléatoire, univers et événements**

➔ Définitions, événements élémentaires, événements contraires, événement « A et B », événement « A ou B », événements incompatibles, système complet d'événements.

II - Probabilités sur un univers fini

- ➔ Définition d'une probabilité.
- ➔ Probabilité d'une union d'événements deux à deux incompatibles.
- ➔ Distribution de probabilité sur Ω , détermination d'une probabilité par les images des événements élémentaires.
- ➔ Événements équiprobables, probabilité uniforme.
- ➔ Propriétés d'une probabilité :

Prop.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On a :

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(C_A B) = P(A) - P(A \cap B)$
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. *Croissance.* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. *Réunion.* $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Formule de Poincaré)

Rq. la formule du crible est HP mais il faut savoir retrouver la formule donnant $P(A \cup B \cup C)$.**III - Probabilités conditionnelles**

- ➔ Définition d'une probabilité conditionnelle, l'application P_B est une probabilité sur Ω .
- ➔ Formule des probabilités composées. (*)
- ➔ Formule des probabilités totales. (*)
- ➔ Formule de Bayes

IV - Événements indépendants

- ➔ Couple d'événements indépendants, si A et B sont indépendants alors A et \bar{B} sont indépendants.
- ➔ Famille d'événements (mutuellement) indépendants
- ➔ Si $n \geq 3$, l'indépendance des A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance (mutuelle).

NOUVEAU COURS :• **Applications linéaires****I - Définitions et propriétés de calcul**

- ➔ Définition, « $f(0_E) = 0_F$ », Exemples et contre-exemples,
- ➔ $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E , composée d'applications linéaires.
- ➔ Endomorphismes, itérés, utilisation des formules de Newton et de Bernoulli lorsque deux endomorphismes commutent.
- ➔ Isomorphismes (composée, réciproque), automorphismes.

II - Noyau et image d'une application linéaire

- ➔ Noyau et image d'une application linéaire, structure.
- ➔ $f : E \rightarrow F$ linéaire alors : f injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$ (*) et f surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$
- | | | |
|--|---|-----|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$: <ul style="list-style-type: none"> • $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ et $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$ • $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$ | } | (*) |
|--|---|-----|
- ➔ Équations linéaires : définition et structure de l'ensemble des solutions.
- ➔ Formes linéaires et hyperplans : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Si D droite vectorielle non contenue dans un hyperplan H alors $E = H \oplus D$, caractérisation en dimension finie.

Rq pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore fait d'exercices dans le chapitre « Applications linéaires »

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 25 : Applications linéaires (fin)

Déroulement d'une colle

1. Citer une définition / propriété du chapitre « Probabilités » :
Par exemple : Définition d'un SCE, d'une probabilité, couple/famille d'événements indépendants, formule des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes (complètes avec leurs hypothèses !)
2. Éventuellement : une question de cours parmi celles signalées par (*)
3. Déterminer, sur un exemple, si une application est linéaire ou non (avec éventuellement recherche de l'image et du noyau. Exemple fait en classe pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$)
4. Exercice(s) au choix de l'interrogateur.
La liste des exercices à savoir refaire est donnée ci-dessous mais l'interrogateur a le choix de poser ou non un exercice de cette liste.

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Exercices Chap. 19**Exercice 14 :** Formule de Vandermonde.Soit n, n_1 et n_2 trois entiers naturels tels que : $n \leq n_1$ et $n \leq n_2$. Montrer de façon ensembliste que :
$$\sum_{k=0}^n \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}.$$
Exercice 16 : Applications strictement croissantes.Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.**Exercice 18 :** p -listes, p -arrangements ou p -combinaison ?

- Nombre de codes possibles pour une carte bleue ?
- Au loto, on tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- Au tiercé, une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
- Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ?
Rq. Au plus un manteau par patère.
- Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire simultanément 3. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire successivement 3 sans remise. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- Combien de pièces contient un jeu de dominos ?
- Quel est le nombre de façons de choisir 2 délégués dans la classe de PC3I 3 ?
- Quel est le nombre de façons de choisir 2 délégués dans la classe de PC3I 3 si l'on impose un garçon et une fille ?
- Quel est le nombre de plaques d'immatriculation possibles ?
Rq. Une plaque d'immatriculation est composée de « 2 lettres – 3 chiffres – 2 lettres »
- Quel est le nombre de plaques d'immatriculation possibles dont tous les chiffres et les lettres sont deux à deux distincts ?
- Quel est le nombre d'anagrammes du mot PREPA ?
- Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
- Un QCM, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions qui ont chacune 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 21 :

Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer avec un jeu de 52 cartes telles que :

- elles contiennent exactement un roi ?
- elles contiennent au moins un roi ?
- elles contiennent le roi de trèfle et au moins 2 piques ?
- elles contiennent 6 cartes d'une couleur, 4 cartes d'une autre et 3 cartes d'une troisième ?

Exercice 25 :Combien y a-t-il de n -entiers dont l'écriture comporte exactement n chiffres ($n \geq 3$) et comportant exactement deux chiffres 8 ?Exercices Chap. 20**Exercice 4 :**Soit $(N, N_g, n, k) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Un commerçant met en vente N tickets dont seulement N_g sont gagnants.

- Si un joueur achète n billets, quelle est la probabilité d'avoir acheté exactement k billets gagnants ?
- Si un joueur achète n billets, quelle probabilité d'avoir acheté au moins un billet gagnant ?

Exercice 6 :

Un couple a deux enfants dont l'un d'eux (au moins) est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?

Exercice 10 :Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue une suite d'épreuves comme suit : lorsqu'on tire une boule d'une certaine couleur, on la remet dans l'urne et on rajoute dans l'urne, k autres boules de la même couleur. On effectue n tirages successifs, avec $n \in \mathbb{N}^*$.Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au n -ième tirage est indépendante de n .**Exercice 11 :**Un automobiliste a le choix entre deux routes A et B pour se rendre à son travail. Le premier jour où il s'y rend, il tire au sort la route qu'il emprunte avec la probabilité $1/2$ pour chaque route ; ensuite, s'il est pris dans un embouteillage sur la route empruntée le n -ième jour, il choisit l'autre route le lendemain mais s'il n'est pas pris dans un embouteillage sur la route empruntée le n -ième jour, il choisit la même le lendemain.On suppose que la probabilité d'être pris dans un embouteillage sur la route A est égale à $a \in]0, 1[$ et sur la route B est $b \in]0, 1[$.Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité, notée p_n , que l'automobiliste emprunte la route A le n -ième jour.Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?**Exercice 13 :**On considère une famille ayant n enfants.

Soit A l'événement « la famille a au moins une fille et au moins un garçon » et B l'événement « la famille a au plus une fille ».

- Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?
- Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

Exercice 14 :Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce équilibrée, de manière indépendante. On considère les événements : A_n : « Obtenir au plus un pile » B_n : « Obtenir au moins un pile et au moins un face »Démontrer que les événements A_n et B_n sont indépendants si et seulement si $n = 3$.**Exercice 17 :**1. Aladin a devant lui n lampes à huile dont une seule est magique et contient un génie. Comme il ne sait pas dans laquelle il se trouve, il frotte les lampes au hasard les unes après les autres en mettant à l'écart celles qu'il a déjà essayées.Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est la probabilité qu'il trouve le génie au k -ième essai ?2. Aladin a toujours devant lui n lampes à huile dont une seule est magique... mais il vient d'apercevoir Jasmine et il est tellement distrait qu'il en oublie de mettre de côté les lampes qu'il a déjà frottées : il les remet avec les lampes non testées !Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est la probabilité qu'il trouve le génie au k -ième essai ?**Problème 2 :**

Dans un laboratoire, pour étudier les capacités d'adaptation des souris, on suit le protocole suivant :

On place une souris dans une boîte comportant trois issues notées A, B et C.

Les deux premières sorties conduisent à un cul de sac alors que la troisième sortie conduit à un morceau de gruyère.

Une fois que la souris a choisi son issue, on la remet au centre de la boîte pour répéter l'expérience.

On observe les résultats suivants :

Si la souris choisit la sortie A, elle sort la fois suivante en B ou C (et jamais en A) de façon équiprobable.

Si elle choisit la sortie B, elle sort la fois suivante en A ou C (et jamais en B) avec la même probabilité.

Si elle choisit la sortie C, elle la choisit de nouveau systématiquement la fois suivante.

On note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : « la souris a choisi la sortie A (respectivement B et C), à la n -ième expérience ».On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

On a observé qu'à la première expérience, la souris sort par l'issue A.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles relations existent-il entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, a_n, b_n$ et c_n ?2. Déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.3. Quelle est la limite de (c_n) ? Interpréter.