

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Applications linéairesI - Définitions et propriétés de calcul

- ➔ Définition, « $f(0_E) = 0_F$ », Exemples et contre-exemples,
- ➔ $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E , composée d'applications linéaires.
- ➔ Endomorphismes, itérés, utilisation des formules de Newton et de Bernoulli lorsque deux endomorphismes commutent.
- ➔ Isomorphismes (composée, réciproque), automorphismes.

II - Noyau et image d'une application linéaire

- ➔ Noyau et image d'une application linéaire, structure.
- ➔ $f : E \rightarrow F$ linéaire alors : f injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$ (*) et f surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$
- ➔ Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$: $\left. \begin{array}{l} \text{Im } (g \circ f) \subset \text{Im } g \quad \text{et} \quad \text{Ker } f \subset \text{Ker } (g \circ f) \\ g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g \end{array} \right\}$ (*)

- ➔ Équations linéaires : définition et structure de l'ensemble des solutions.
- ➔ Formes linéaires et hyperplans : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Si D droite vectorielle non contenue dans un hyperplan H alors $E = H \oplus D$, caractérisation en dimension finie.

NOUVEAU COURS :• Applications linéairesIII - Lien avec les familles de vecteurs

- ➔ Image par une application linéaire d'une famille génératrice / d'une famille liée.
- ➔ Image par une application linéaire **injective** d'une famille libre.
- ➔ Définition d'une application linéaire par l'image d'une base :
Si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une **base** de E et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in F^n$, alors : $\exists ! f \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = y_i$
- De plus, on a : f injective $\Leftrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n)$ famille libre dans F
 f surjective $\Leftrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n)$ famille génératrice de F
- ➔ Si F et G sev supplémentaires de E , alors une application linéaire définie sur E est entièrement déterminée par ses restrictions à F et G .
- ➔ Deux e.v. sont isomorphes ssi ils ont même dimension, tout \mathbb{K} -ev de dimension $n > 0$, est isomorphe à \mathbb{K}^n .
- ➔ Si E et F sont deux ev de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à $\dim E \times \dim F$.

IV - Introduction aux matrices d'applications linéaires

- ➔ Écriture de la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par l'image d'une base de E ou définie explicitement, relativement à des bases données.
- ➔ Multiplication d'une matrice par la matrice colonne des **coordonnées** d'un vecteur pour obtenir les **coordonnées** de son image par f . Il faut faire attention aux bases avec lesquelles on travaille.

IV - Applications linéaires en dimension finie

- ➔ Rang d'une application linéaire.
- ➔ Théorème du rang :
Soit E ev., F ev. quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $\text{Im } f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E . (*)
- Si de plus, E est de **dimension finie** : $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$
- ➔ Caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives, bijectives à l'aide du rang.
- ➔ Si $\dim E = \dim F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a : f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective
- Si f endomorphisme en **dimension finie**, f bijective ssi f inversible à droite ou à gauche
- ➔ Invariance du rang par composition, à droite ou à gauche, par un isomorphisme.

V - Exemples usuels d'applications linéaires

- ➔ Homothéties vectorielles
- ➔ Projecteurs : définition, propriétés, caractérisation par idempotence :
Si p est un endomorphisme idempotent de E (càd $p \circ p = p$) alors :

$$\left. \begin{array}{l} 1. x \in \text{Im } p \Leftrightarrow p(x) = x \\ 2. E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p \\ 3. p \text{ est le projecteur sur } \text{Im } p \text{ parallèlement à } \text{Ker } p \end{array} \right\} (*)$$
- ➔ Symétries vectorielles : définition, propriétés, caractérisation par involutivité :
Si s est un endomorphisme involutif de E (càd $s \circ s = \text{Id}_E$) alors :

$$\left. \begin{array}{l} 1. E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E) \\ 2. s \text{ symétrie par rapport à } \text{Ker}(s - \text{id}_E) \text{ parallèlement à } \text{Ker}(s + \text{id}_E). \end{array} \right\} (*)$$

Rq pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore fait d'exercices sur la partie « Projecteurs / symétries »

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 26 : Relations de comparaison pour les fonctions.

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Exercices Chap. 21**Exercice 6 :**

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x - y + 2z, x - 3y - z, 4x - 7y)$$

1. Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
2. Déterminer le noyau et l'image de f . On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 7 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ la matrice de f , application linéaire, relativement aux bases canoniques.

1. A-t-on $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ou $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$? Déterminer l'expression de f .
2. Déterminer le noyau et l'image de f . On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 8 :

Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = (1 + X^2)P(2) + (X + 1)P'(1)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f . On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 11 :

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2 \cdot \text{id}_E = 0$.

1. Montrer que : $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2 \cdot \text{id}_E)$.
2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} .

Exercice 14 :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E .

1. Montrer que : $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0_E\}$
2. Montrer que : $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g \Leftrightarrow E = \text{Ker } g + \text{Im } f$.

Exercice 15 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer le rang de f .
2. En déduire la dimension du noyau de f . Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f .
3. A-t-on $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = \mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 17 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f l'unique endomorphisme de E vérifiant : $f(e_1) = e_2 - e_3, f(e_2) = e_3 - e_1$ et $f(e_3) = e_1 - e_2$.

1. Déterminer une base de $\text{Im } f$ et une base de $\text{Ker } f$.
2. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans

Exercice 25 :

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E .

On suppose que f est nilpotent d'ordre n c'est-à-dire $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur x de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
2. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
3. Déterminer la matrice de f dans cette base. Quel est le rang de f ?