Semaine de colles n°25 du 04/05/26 au 08/05/26

Du programme précédent :

- **Applications linéaires**

I – Définitions et propriétés de calcul

- Définition, « $f(0_E) = 0_F$ », Exemples et contre-exemples,
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E, composée d'applications linéaires.
- Endomorphismes, itérés, utilisation des formules de Newton et de Bernoulli lorsque deux endomorphismes commutent.
- Isomorphismes (composée, réciproque), automorphismes.

II – Noyau et image d'une application linéaire

- Noyau et image d'une application linéaire, structure.
- $f : E \longrightarrow F$ linéaire alors : f injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ **(*)** et f surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = F$
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$: **(*)**
  - $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$
  - $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$
- Équations linéaires : définition et structure de l'ensemble des solutions.
- Formes linéaires et hyperplans : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si D droite vectorielle non contenue dans un hyperplan H alors $E = H \oplus D$, caractérisation en dimension finie.

Nouveau cours :

- **Applications linéaires**

III – Lien avec les familles de vecteurs

- Image par une application linéaire d'une famille génératrice / d'une famille liée.
- Image par une application linéaire **injective** d'une famille libre.
- Définition d'une application linéaire par l'image d'une base :

  Si $(e_1, e_2,.. e_n)$ est une **base** de E et $(y_1, y_2,.. y_n) \in F^n$, alors : $\exists !\, f \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = y_i$

  De plus, on a : f injective $\Leftrightarrow$ $(y_1, y_2,.. y_n)$ famille libre dans F

  f surjective $\Leftrightarrow$ $(y_1, y_2,.. y_n)$ famille génératrice de F
- Si F et G sev supplémentaires de E, alors une application linéaire définie sur E est entièrement déterminée par ses restrictions à F et G.
- Deux e.v. sont isomorphes ssi ils ont même dimension, tout $\mathbb{K}$-ev de dimension $n > 0$, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Si E et F sont deux ev de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à $\dim E \times \dim F$.

IV – Introduction aux matrices d'applications linéaires

- Écriture de la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par l'image d'une base de E ou définie explicitement, relativement à des bases données.
- Multiplication d'une matrice par la matrice colonne des **coordonnées** d'un vecteur pour obtenir les **coordonnées** de son image par f. Il faut faire attention aux bases avec lesquelles on travaille.

IV – Applications linéaires en dimension finie

- Rang d'une application linéaire.
- Théorème du rang :

Soit E ev. , F ev. quelconque et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Im f est isomorphe à tout supplémentaire de Ker f dans E. **(*)**

Si de plus, E est de **dimension finie** : $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$

- Caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives, bijectives à l'aide du rang.
- Si **dim E = dim F** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a : f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective

Si f endomorphisme en **dimension finie**, f bijective ssi f inversible à droite ou à gauche

- Invariance du rang par composition, à droite ou à gauche, par un isomorphisme.

V – Exemples usuels d'applications linéaires

- Homothéties vectorielles
- Projecteurs : définition, propriétés, caractérisation par idempotence :

  Si p est un endomorphisme idempotent de E (càd $p \circ p = p$) alors : **(*)**
  1. $x \in \operatorname{Im} p \Leftrightarrow p(x) = x$
  2. $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$
  3. p est le projecteur sur Im p parallèlement à Ker p
- Symétries vectorielles : définition, propriétés, caractérisation par involutivité :

  Si s est un endomorphisme involutif de E (càd $s \circ s = Id_E$) alors : **(*)**
  1. $E = \operatorname{Ker}(s - id_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + id_E)$
  2. s symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - id_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + id_E)$.

Rq pour les interrogateurs : Nous n'avons pas encore fait d'exercices dans le chapitre « Applications linéaires »

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 26 : Relation de comparaison pour les fonctions.

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°25 du 04/05/26 au 08/05/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 21

Exercice 6 :
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x - y + 2z,\ x - 3y - z,\ 4x - 7y)$$

1. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 7 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ la matrice de f, application linéaire, relativement aux bases canoniques.

1. A-t-on $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ou $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$? Déterminer l'expression de f.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 8 :
Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par : $\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = (1 + X^2)P(2) + (X + 1)P'(1)$
1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire sa matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 11 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2.\mathrm{id}_E = 0$.
1. Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2.\mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 14 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$

2. Montrer que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 15 :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Déterminer le rang de f.
2. En déduire la dimension du noyau de f. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.
3. A-t-on $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 17 :
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit f l'unique endomorphisme de E vérifiant : $f(e_1) = e_2 - e_3, f(e_2) = e_3 - e_1$ et $f(e_3) = e_1 - e_2$.
1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$ et une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans

Exercice 25 :
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.
On suppose que f est nilpotent d'ordre n c'est-à-dire $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
1. Justifier qu'il existe un vecteur x de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
2. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de f dans cette base. Quel est le rang de f ?