

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Applications linéairesI - Définitions et propriétés de calculII - Noyau et image d'une application linéaireIII - Lien avec les familles de vecteurs

➔ Image par une application linéaire d'une famille génératrice / d'une famille liée.

➔ Image par une application linéaire **injective** d'une famille libre.

➔ Définition d'une application linéaire par l'image d'une base :

Si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une **base** de  $E$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in F^n$ , alors :  $\exists ! f \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = y_i$

De plus, on a :  $f$  injective  $\Leftrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n)$  famille libre dans  $F$

$f$  surjective  $\Leftrightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n)$  famille génératrice de  $F$

➔ Si  $F$  et  $G$  sev supplémentaires de  $E$ , alors une application linéaire définie sur  $E$  est entièrement déterminée par ses restrictions à  $F$  et  $G$ .

➔ Deux e.v. sont isomorphes ssi ils ont même dimension, tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n > 0$ , est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

➔ Si  $E$  et  $F$  sont deux ev de dimension finie alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie égale à  $\dim E \times \dim F$ .

IV - Introduction aux matrices d'applications linéaires

➔ Écriture de la matrice d'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  définie par l'image d'une base de  $E$  ou définie explicitement, relativement à des bases données.

➔ Multiplication d'une matrice par la matrice colonne des **coordonnées** d'un vecteur pour obtenir les **coordonnées** de son image par  $f$ . Il faut faire attention aux bases avec lesquelles on travaille.

IV - Applications linéaires en dimension finie

➔ Rang d'une application linéaire.

➔ Théorème du rang :

Soit  $E$  ev. ,  $F$  ev. quelconque et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  $\text{Im } f$  est isomorphe à tout supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ . (\*)

Si de plus,  $E$  est de **dimension finie** :  $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$

➔ Caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives, bijectives à l'aide du rang.

➔ Si  $\dim E = \dim F$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  alors on a :  $f$  bijective  $\Leftrightarrow f$  injective  $\Leftrightarrow f$  surjective

Si  $f$  endomorphisme en **dimension finie**,  $f$  bijective ssi  $f$  inversible à droite ou à gauche

➔ Invariance du rang par composition, à droite ou à gauche, par un isomorphisme.

V - Exemples usuels d'applications linéaires

➔ Homothéties vectorielles

➔ Projecteurs : définition, propriétés, caractérisation par idempotence :

Si  $p$  est un endomorphisme idempotent de  $E$  (càd  $p \circ p = p$ ) alors :

$$1. x \in \text{Im } p \Leftrightarrow p(x) = x$$

$$2. E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$$

3.  $p$  est le projecteur sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$

(\*)

➔ Symétries vectorielles : définition, propriétés, caractérisation par involutivité :

Si  $s$  est un endomorphisme involutif de  $E$  (càd  $s \circ s = \text{Id}_E$ ) alors :

$$1. E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$$

2.  $s$  symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ .

NOUVEAU COURS :• Comparaison locale des fonctions (Partie 1)I - Relations de comparaison locale des fonctions

➔ Notion de voisinage

➔ Relation de domination : définition, caractérisation par quotient, propriétés.

➔ Fonction négligeable devant une autre : définition, caractérisation par quotient, propriétés, comparaison des fonctions de références.

➔ Fonctions équivalentes : définition, caractérisation par quotient

Propriétés : symétrie, transitivité, compatibilité avec les opérations, substitution.

➔ Obtention d'équivalent par encadrement

➔ Équivalents et signe des expressions, liens entre équivalents et limites.

➔ Si  $f$  dérivable en  $a$  et si  $f'(a) \neq 0$  alors  $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$ .

➔ Équivalents de référence :

• cas des fonctions polynomiales

$$\bullet \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ et } \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\bullet \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\bullet e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \text{ et } e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\bullet \ln(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\bullet \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ et } \text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\bullet \text{Pour } \alpha \in \mathbb{R}^+, \text{ fixé : } (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

$$\bullet \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ et } \arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\bullet \arccos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

• Utilisation des matrices en algèbre linéaireI - Matrices représentatives

➔ Matrices représentatives d'un vecteur, d'une famille de vecteur, d'une application linéaire.

II - Opérations sur les matrices représentatives

➔ Combinaisons linéaires de matrices représentatives d'applications linéaires, isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $M_{n,p}(\mathbb{K})$  où  $\dim E = p$  et  $\dim F = n$ , dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

➔ Isomorphisme canonique de  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  sur  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ , application linéaire canoniquement associée à une matrice.

➔ Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

➔ Produit de matrices représentatives d'applications linéaires, lien entre applications linéaires bijectives et matrices inversibles.

III - Changement de bases

➔ Matrices de passage entre deux bases :  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M(\text{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ , les matrices de passages sont inversibles.

➔ Effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur et sur une matrice d'application linéaire.

➔ Définition de matrices semblables, caractérisation : elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Exercice fait dans le cours (cf exercices à savoir refaire) (\* ou exercice très proche)

Rq pour les interrogateurs : Pour le moment, nous n'avons pas encore fait d'exercices sur le chapitre

« Utilisation des matrices en algèbre linéaire ».

(\*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 27 : Utilisation des matrices en algèbre linéaire (Notion de rang) + Déterminants.

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (\*)

2. Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents

3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Exercices Chap. 21Exercice 6 :

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On considère  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  tel que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x - y + 2z, x - 3y - z, 4x - 7y)$$

1. Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ . On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 8 :

Soit  $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par :  $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = (1 + X^2)P(2) + (X + 1)P'(1)$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Écrire sa matrice relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
3. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ . On déterminera une base de ces deux espaces.

Exercice 9 : Trace d'une matrice carrée.

1. On définit l'application trace par :  $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  Montrer que  $\varphi$  est une forme linéaire.

$$M \mapsto \text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$$

2. Montrer que :  $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
3. Existe-t-il un couple de matrices carrées  $(A, B)$  tel que  $AB - BA = I_n$  ?

Exercice 11 :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^2 - 3f + 2 \cdot \text{id}_E = 0$ .

1. Montrer que :  $E = \text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2 \cdot \text{id}_E)$ .
2. Montrer que  $f$  est un automorphisme et déterminer  $f^{-1}$ .

Exercice 14 :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ .

1. Montrer que :  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0_E\}$
2. Montrer que :  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g \Leftrightarrow E = \text{Ker } g + \text{Im } f$ .

Exercice 15 :

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  ayant pour matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

1. Déterminer le rang de  $f$ .
2. En déduire la dimension du noyau de  $f$ . Déterminer une base du noyau de  $f$  et une base de l'image de  $f$ .
3. A-t-on  $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = \mathbb{R}_2[X]$  ?

Exercice 17 :

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ .

Soit  $f$  l'unique endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $f(e_1) = e_2 - e_3, f(e_2) = e_3 - e_1$  et  $f(e_3) = e_1 - e_2$ .

1. Déterminer une base de  $\text{Im } f$  et une base de  $\text{Ker } f$ .
2. Montrer que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires dans

Exercice 20 :

Soit  $E$  espace vectoriel de dimension 3. On considère  $f$  non nul, dans  $\mathcal{L}(E)$  tel que  $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Déterminer le rang de  $f$ .
2. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  soit :  $M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 25 :

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

On suppose que  $f$  est nilpotent d'ordre  $n$  c'est-à-dire  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Justifier qu'il existe un vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ .
2. Montrer que  $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .
3. Déterminer la matrice de  $f$  dans cette base. Quel est le rang de  $f$  ?

Exercice 26 :

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f + g$  soit bijectif et  $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

Que vaut  $\text{rg } f + \text{rg } g$  ?

Exercice 31 :

Soit  $u = (1, 1, 2), v = (-2, -1, 3)$  et  $w = (0, -3, -1)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . On pose :  $F = \text{Vect}(u, v)$  et  $G = \text{Vect}(w)$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Que peut-on en déduire ?
2. a. Soit  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Déterminer sa matrice relativement à la base  $\mathcal{B}$ .  
b. Déterminer la matrice de  $p$  relativement à la base canonique  $\mathcal{B}_c$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Pas de liste d'exercices à savoir refaire sur le Chap. 22

Il faut savoir calculer des limites avec utilisation d'équivalents.

Exercices Chap. 23Révisions :

- Revoir le calcul de l'inverse d'une matrice
- Revoir les méthodes pour calculer les puissances d'une matrice

Exercice fait dans le cours : (\*)

On considère  $u = (1, 2, 1), v = (0, 1, 1)$  et  $w = (-1, 1, 0)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

On pose :  $F = \text{Vect}(u, v)$  et  $G = \text{Vect}(w)$

1. Montrer que :  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Que peut-on en déduire pour  $F$  et  $G$  ?
2. Déterminer la matrice représentative de la symétrie  $s$  par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$ , relativement à la base  $(u, v, w)$ .
3. En utilisant la formule de changement de bases, déterminer la matrice de  $s$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Comment retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la formule de changement de bases ?