

**DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :**• **Comparaison locale des fonctions (Partie 1)****I - Relations de comparaison locale des fonctions**

- ➔ Notion de voisinage
- ➔ Relation de domination : définition, caractérisation par quotient, propriétés.
- ➔ Fonction négligeable devant une autre : définition, caractérisation par quotient, propriétés, comparaison des fonctions de références.
- ➔ Fonctions équivalentes : définition, caractérisation par quotient  
Propriétés : symétrie, transitivité, compatibilité avec les opérations, substitution.
- ➔ Obtention d'équivalent par encadrement
- ➔ Équivalents et signe des expressions, liens entre équivalents et limites.
- ➔ Si  $f$  dérivable en  $a$  et si  $f'(a) \neq 0$  alors  $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$ .

## ➔ Équivalents de référence :

## • cas des fonctions polynomiales

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\text{Pour } \alpha \in \mathbb{R}^n, \text{ fixé : } (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\arccos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

• **Utilisation des matrices en algèbre linéaire****I - Matrices représentatives**

- ➔ Matrices représentatives d'un vecteur, d'une famille de vecteur, d'une application linéaire.

**II - Opérations sur les matrices représentatives**

- ➔ Combinaisons linéaires de matrices représentatives d'applications linéaires, isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $M_{n,p}(\mathbb{K})$  où  $\dim E = p$  et  $\dim F = n$ , dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
- ➔ Isomorphisme canonique de  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  sur  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ , application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- ➔ Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
- ➔ Produit de matrices représentatives d'applications linéaires, lien entre applications linéaires bijectives et matrices inversibles.

**III - Changement de bases**

- ➔ Matrices de passage entre deux bases :  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = M(\operatorname{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ , les matrices de passages sont inversibles.
- ➔ Effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur et sur une matrice d'application linéaire.
- ➔ Définition de matrices semblables, caractérisation : elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Exercice fait dans le cours (cf exercices à savoir refaire) (\* ou exercice très proche)

**NOUVEAU COURS :**• **Utilisation des matrices en algèbre linéaire****IV - Rang d'une matrice**

- ➔ Définition, propriétés, caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang.
- ➔ Lien avec le rang d'une application linéaire.
- ➔ Multiplier une matrice par une matrice inversible ne change pas son rang.
- ➔ Les OEL et les OEC conservent le rang.
- ➔ Le rang d'une matrice est invariant par transposition.

• **Déterminants****I - Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

- ➔ Définitions : Forme n-linéaire / alternée / symétrique.
- ➔ Prop admise : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur  $E$  de  $\dim n$  est un  $ev$  de dimension 1.
- ➔ Définition :  $\det_{\mathcal{B}}$  est l'unique forme n-linéaire alternée sur  $E$  telle que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
- ➔ Propriétés :  $\det_{\mathcal{B}}$  est antisymétrique,  $\det$  d'une famille avec au moins un vecteur nul,  $\det_{\mathcal{B}}(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \dots$
- ➔ Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  bases de  $E$ , lien entre  $\det_{\mathcal{B}}$  et  $\det_{\mathcal{B}'}$ , caractérisation d'une base.

**II - Expression du déterminant lorsque  $n = 2$  ou  $n = 3$** 

- ➔ Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$   
Rq. Interprétation en termes d'aire/volume.

**III - Déterminant d'un endomorphisme**

- ➔ Définition, propriétés, déterminant d'une composée, caractérisation des automorphismes.

**III - Déterminant d'une matrice carrée**

- ➔ Définition : déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .
- ➔ Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs, lien avec le déterminant d'un endomorphisme.
- ➔ Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle, deux colonnes égales ou proportionnelles est nul.
- ➔ Caractérisation matrices inversibles, déterminant d'un produit, de  $A^p$ ,  $A^{-1}$  lorsque  $A$  est inversible, et de  $A^T$ .

**IV - Calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée**

- ➔ Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- ➔ Déterminant d'une matrice triangulaire
- ➔ Effet des opérations élémentaires

(\*) **Démonstrations / Méthodes à connaître** et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 28 : Variables aléatoires

**Déroulement d'une colle**

1. Un calcul de limite avec utilisation d'équivalents
2. Exercice proche de celui signalé par (\*) ou le calcul d'un déterminant.
3. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraîne une note < 10

Pas de liste d'exercices à savoir refaire sur le Chap. 22

Il faut savoir calculer des limites avec utilisation d'équivalents.

Exercices Chap. 23

Révisions :

- Revoir le calcul de l'inverse d'une matrice
- Revoir les méthodes pour calculer les puissances d'une matrice

Exercice fait dans le cours : (\*)

On considère  $u = (1, 2, 1)$ ,  $v = (0, 1, 1)$  et  $w = (-1, 1, 0)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

On pose :  $F = \text{Vect}(u, v)$  et  $G = \text{Vect}(w)$

1. Montrer que :  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Que peut-on en déduire pour F et G ?
2. Déterminer la matrice représentative de la symétrie  $s$  par rapport à F, parallèlement à G, relativement à la base  $(u, v, w)$ .
3. En utilisant la formule de changement de bases, déterminer la matrice de  $s$  relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Comment retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la formule de changement de bases ?

Exercice 14 :

Soit  $f$  un endomorphisme de E de dimension  $n$ . On suppose que  $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$  et que  $f^2 - 3f + 2 \cdot \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe un vecteur  $x \neq 0_E$  tel que  $f(x) = ax$ . Montrer que  $a \in \{1, 2\}$ .

Rq. On dit alors que  $a$  est une valeur propre de  $f$  et que  $x$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $a$ .

2. Montrer que  $\text{Ker}(f - 2 \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$  sont supplémentaires dans E.
3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

Exercice 15 :

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  dont la matrice relativement à la base canonique est :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les réel  $a$  tels que  $\text{Ker}(f - a \text{id}_E) \neq \{0_E\}$ . (Fait en TD avec le déterminant)
2. Pour chaque valeur de  $a$  trouvée à la question précédente, déterminer une base de  $\text{Ker}(f - a \text{id}_E)$ .
3. Déterminer une base  $\mathcal{B}'$  de E dans laquelle la matrice représentative de  $f$  soit diagonale.
4. En déduire  $A^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Exercices Chap. 24

Les équivalents suivantes vus en exercice sont à connaître :

Soit  $f$  endomorphisme de E **De dimension finie** dont la matrice relativement à une base est A.

On a :  $\exists x \neq 0_E, f(x) = ax \iff \exists x \neq 0_E, (f - a \text{id})(x) = 0_E$

- $\iff \text{Ker}(f - a \text{id}) \neq \{0_E\}$
- $\iff (f - a \text{Id})$  non injective car  $f - a \text{Id}$  est linéaire
- $\iff (f - a \text{Id})$  non bijective car  $f - a \text{Id}$  endomorphisme en dimension finie
- $\iff (f - a \text{Id})$  non surjective car  $f - a \text{Id}$  endomorphisme en dimension finie
- $\iff \text{rg}(f - a \text{Id}) < \dim E$
- $\iff \text{rg}(A - a I_3) < \dim E$
- $\iff \det(f - a \text{Id}) = 0$
- $\iff \det(A - a I_3) = 0$

Exercice fait dans le cours :

Ex. Soit  $n \geq 1$  et  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & & (0) \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & (0) & \ddots \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ . On pose :  $d_n = \det A_n$ .

1<sup>er</sup> méthode : On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve une formule de récurrence.  
2<sup>ème</sup> méthode : En utilisant les OEC.

Exercice 2 : Déterminant d'ordre 3.

Calculer, **sous forme factorisée**, les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad D_7 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : 2. Calculer, **sous forme factorisée**, les déterminants suivants :  $D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 4 : Calculer les déterminants, d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ , suivants :

$$1. \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & 2\beta & \dots & 2\beta \\ 2\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\beta \\ 2\alpha & \dots & 2\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} \quad 2. \Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$6. \Delta_n = \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & & (0) \\ 1 & 2 \cos \theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \cos \theta \end{vmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 8 : Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq b$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :  $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \dots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}$ .

Montrer que  $\Delta_n(x)$  est une fonction affine de  $x$ , puis calculer  $\Delta_n(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

Exercice 9 : Déterminant de Vandermonde.

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . On pose :  $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ . Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de ce déterminant.

1. **1<sup>ère</sup> méthode.** À l'aide d'O.E.C., trouver une relation de récurrence entre  $\Delta_n$  et  $\Delta_{n-1}$ . Conclure.

2. **2<sup>ème</sup> méthode.** En utilisant le polynôme  $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)$