

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• DéterminantsI - Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

- ➔ Définitions : Forme n-linéaire / alternée / symétrique.
- ➔ Prop admise : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E de dim n est un ev de dimension 1.
- ➔ Définition : \det_B est l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que $\det_B(B) = 1$
- ➔ Propriétés : \det_B est antisymétrique, det d'une famille avec au moins un vecteur nul, $\det_B(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) = \dots$
- ➔ Si B et B' bases de E, lien entre \det_B et $\det_{B'}$, caractérisation d'une base.

II - Expression du déterminant lorsque n = 2 ou n = 3

- ➔ Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées dans les cas n = 2 et n = 3
- Rq. Interprétation en termes d'aire/volume.

III - Déterminant d'un endomorphisme

- ➔ Définition, propriétés, déterminant d'une composée, caractérisation des automorphismes.

III - Déterminant d'une matrice carrée

- ➔ Définition : déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n .
- ➔ Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs, lien avec le déterminant d'un endomorphisme.
- ➔ Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle, deux colonnes égales ou proportionnelles est nul.
- ➔ Caractérisation matrices inversibles, déterminant d'un produit, de A^p , A^{-1} lorsque A est inversible, et de A^T .

IV - Calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée

- ➔ Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
- ➔ Déterminant d'une matrice triangulaire
- ➔ Effet des opérations élémentaires

NOUVEAU COURS :• Variables aléatoires sur un espace probabilisé finiI - Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

- ➔ Définition, événements de la forme $(X \in A)$, $(X = x)$, etc.
- ➔ Système complet d'événements associé à une variable aléatoire

II - Loi de probabilité d'une variable aléatoire

- ➔ Définition : P_X définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ et caractérisée par $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$
- ➔ Image d'une variable aléatoire par une application et loi associée.
- ➔ Loi conditionnelle d'une VA sachant un évènement

III - Indicateurs de position et de dispersion

- ➔ Espérance : définition, interprétation, exemples, propriétés, formule de transfert.
- ➔ Variance et écart-type : définition, interprétation, exemples, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
- ➔ Inégalité de Markov (*) et Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*).

IV - Lois usuelles

- ➔ Loi uniforme : définition, exemples, espérance et variance.
Calcul espérance et variance dans le cas où $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ (*)
- ➔ Loi de Bernoulli : définition, exemples, espérance et variance.
- ➔ Loi binomiale : définition, exemples, espérance et variance. (*)

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 29 : Couples/Familles de VA + DL (début)

Déroulement d'une colle

1. Une question de cours parmi celles signalées par (*)
2. Exercice(s) au choix de l'interrogateur : On pourra commencer par un exercice à savoir refaire ou assez proche.

Un cours non connu entraine une note < 10

Exercices Chap. 24

Les équivalences suivantes vues en exercice sont à connaître :

Soit f endomorphisme de E de dimension finie dont la matrice relativement à une base est A .

- On a : $\exists x \neq 0_E, f(x) = ax \iff \exists x \neq 0_E, (f - a \text{ id})(x) = 0_E$
- $\iff \text{Ker}(f - a \text{ id}) \neq \{0_E\}$
- $\iff (f - a \text{ Id})$ non injective car $f - a \text{ Id}$ est linéaire
- $\iff (f - a \text{ Id})$ non bijective car $f - a \text{ Id}$ endomorphisme en dimension finie
- $\iff (f - a \text{ Id})$ non surjective car $f - a \text{ Id}$ endomorphisme en dimension finie
- $\iff \text{rg}(f - a \text{ Id}) < \dim E$
- $\iff \text{rg}(A - a I_3) < \dim E$
- $\iff \det(f - a \text{ Id}) = 0$
- $\iff \det(A - a I_3) = 0$

Exercice fait dans le cours :

Ex. Soit $n \geq 1$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & & (0) \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & (0) & \ddots \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. On pose : $d_n = \det A_n$.

1^{er} méthode : On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve une formule de récurrence.
2^{ème} méthode : En utilisant les OEC.

Exercice 2 : Déterminant d'ordre 3.

Calculer, sous forme factorisée, les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad D_7 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : 2. Calculer, sous forme factorisée, les déterminants suivants : $D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

Exercice 4 : Calculer les déterminants, d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, suivants :

$$1. \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & 2\beta & \dots & 2\beta \\ 2\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\beta \\ 2\alpha & \dots & 2\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} \quad 2. \Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$6. \Delta_n = \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & & (0) \\ 1 & 2\cos \theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos \theta \end{vmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 8 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \neq b$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \dots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}$.

Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x , puis calculer $\Delta_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : Déterminant de Vandermonde.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de ce déterminant.

1. 1^{ère} méthode. À l'aide d'O.E.C., trouver une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1} . Conclure.
2. 2^{ème} méthode. En utilisant le polynôme $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)$

Exercice 20 : Diagonalisation.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$, est une valeur propre de f lorsqu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que : $f(x) = \lambda x$.

1. Montrer que : λ valeur propre de $f \iff \det(A - \lambda I_3) = 0$.
2. Déterminer les valeurs propres de f .
3. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que $M(f, \mathcal{B})$ soit diagonale.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de f^n dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercices Chap. 25

Exercice 4 :

Donner la loi suivie par X dans les cas suivants :

1. On choisit un jeton au hasard dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. On note X le numéro du jeton.
2. On note X le nombre de garçons dans une famille de 4 enfants.
3. Alice a égaré son poly. sur les variables aléatoires dans son classeur de maths qui compte 500 feuilles. Elle décide de la chercher en vérifiant toutes les pages dans l'ordre. La variable aléatoire X est égale au rang d'apparition de son précieux poly.
4. On range au hasard 9 clés dans 3 tiroirs. On note X le nombre de clés dans le premier tiroir.
5. Seul 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles et on note X de nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
6. On note X le nombre de faces noires obtenues en lançant 5 fois un dé à 6 faces dont 2 blanches et 4 noires.

Exercice 7 :

Dans un jeu à gratter, on met en vente 1000 tickets dont 2 sont gagnants. On achète n billets.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de billets gagnants achetés. Déterminer la loi de X .
2. Combien faut-il acheter de billets pour que la probabilité de gagner quelque chose soit supérieure ou égale à 95% ?

Exercice 10 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n tickets dont un en or donnant accès à une chocolaterie. On effectue des tirages successifs sans remise dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du ticket d'or.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 17 :

Katniss Everdeen décoche n flèches sur une cible. Chacune a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'atteindre la cible. Chaque tir est indépendant des précédents.

On note X le numéro de la première flèche qui touche la cible, avec $X = 0$ si la cible n'est pas atteinte.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Calculer la probabilité que Katniss touche sa cible au premier tir sachant qu'elle l'a atteinte.