Semaine de colles n°29 du 08/06/26 au 12/06/26

Du programme précédent :

Révisions : Chap. 20. Probabilités sur un univers fini.

• Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

I – Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini
- Définition, événements de la forme $(X \in A)$, $(X = x)$, etc.
- Système complet d'événements associé à une variable aléatoire

II – Loi de probabilité d'une variable aléatoire
- Définition : P_X définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ et caractérisée par $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$
- Image d'une variable aléatoire par une application et loi associée.
- Loi conditionnelle d'une VA sachant un évènement

III – Indicateurs de position et de dispersion
- Espérance : définition, interprétation, exemples, propriétés, formule de transfert.
- Variance et écart-type : définition, interprétation, exemples, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
- Inégalité de Markov **(*)** et Inégalité de Bienaymé-Tchebychev **(*)**.

IV – Lois usuelles
- Loi uniforme : définition, exemples, espérance et variance.
  Calcul espérance et variance dans le cas où $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ **(*)**
- Loi de Bernoulli : définition, exemples, espérance et variance.
- Loi binomiale : définition, exemples, espérance et variance. **(*)**

Nouveau cours :

• Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

V – Couples de VA
- Couple de VA, Loi conjointe, lois marginales, covariance.
- Loi d'une composée
- Couple de VA indépendantes, espérance et variance.

VI – Généralisation au n-uplet de VA
- n-uplet de VA mutuellement indépendantes, lemme des coalitions
- Loi binomiale comme somme de loi de Bernoulli de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

• Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)

II – Notion de développements limités
- Développements limités au voisinage de 0, d'un point a quelconque, unicité de la partie régulière.
- Cas particulier des DL d'ordre 0 et 1 : lien avec la continuité (ou le prolongement par continuité) et la dérivabilité en a (de f ou de son prolongement)
- Propriétés : troncature, substitution, parité, lien avec les équivalents.
- Deux exemples : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \ldots$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \ldots$

III – Formule de Taylor Young et DL usuels
- Formule de Taylor Young (admise pour le moment).
- $DL_n(0)$ usuels : exp, ch, sh, cos, sin, $x \longmapsto (1 + x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé.**

IV – Opérations sur les DL
- Somme, produit, composition, inverse, quotient. Ex : $DL_6(0)$ de tan par quotient **(*)**
- Développements limités d'une primitive. Ex : $DL_5(0)$ de la fonction arccosinus **(*)**
- $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \ln(1 + x)$, $x \longmapsto \ln(1 - x)$ et $x \longmapsto \arctan(x)$
  Ex : $DL_6(0)$ de la fonction tangente en utilisant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ **(*)**

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 30 : DL (fin : applications des DL) + Intégration

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions de cours parmi celles signalées par (*)
2. Calcul d'un DL avec produit et/ou quotient et/ou composée
3. Exercice(s) sur les variables aléatoires.

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°29 du 08/06/26 au 12/06/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 25

Exercice 4 :
Donner la loi suivie par X dans les cas suivants :
1. On choisit un jeton au hasard dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. On note X le numéro du jeton.
2. On note X le nombre de garçons dans une famille de 4 enfants.
3. Alice a égaré son poly. sur les variables aléatoires dans son classeur de maths qui compte 500 feuilles. Elle décide de la chercher en vérifiant toutes les pages dans l'ordre. La variable aléatoire X est égale au rang d'apparition de son précieux poly.
4. On range au hasard 9 clés dans 3 tiroirs. On note X le nombre de clés dans le premier tiroir.
5. Seul 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles et on note X de nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
6. On note X le nombre de faces noires obtenues en lançant 5 fois un dé à 6 faces dont 2 blanches et 4 noires.

Exercice 7 :
Dans un jeu à gratter, on met en vente 1000 tickets dont 2 sont gagnants. On achète n billets.
1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de billets gagnants achetés. Déterminer la loi de X.
2. Combien faut-il acheter de billets pour que la probabilité de gagner quelque chose soit supérieure ou égale à 95% ?

Exercice 10 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n tickets dont un en or donnant accès à une chocolaterie. On effectue des tirages successifs sans remise dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du ticket d'or.
1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 13 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boites numérotées de 1 à n.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la boite numérotée k contient k boules numérotées 1 à k. On choisit au hasard une boule dans une boite.
On note X le numéro de la boite et Y celui de la boule.
1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi de Y (on laissera sous forme d'une somme) et son espérance.

Exercice 14 :
On lance un dé honnête et on note X le nombre obtenu.
On relance ensuite X fois le dé et on note Y le nombre de 1 obtenus parmi ces X tirages.
Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 15 :
Soit un nombre entier $n \geq 1$ et deux nombres réels p et a de $]0, 1[$.
Le nombre de graines plantées sur un mètre carré de jardin est une variable aléatoire N qui suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.
Chaque graine a la probabilité a de germer. Soit G le nombre de graines qui ont germé.
1. Pour tout i et j dans $[\![0, n]\!]$, déterminer la probabilité $P_{(N = i)}(G = j) = P(G = j \mid N = i)$.
2. Déterminer la loi du couple (N, G).
3. En déduire la loi de G.

Exercice 17 :
Katniss Everdeen décoche n flèches sur une cible. Chacune a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'atteindre la cible. Chaque tir est indépendant des précédents.
On note X le numéro de la première flèche qui touche la cible, avec X = 0 si la cible n'est pas atteinte.
1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Calculer la probabilité que Katniss touche sa cible au premier tir sachant qu'elle l'a atteinte.

Exercice 22 :
Soit $X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
1. a. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.
Ind. On pourra commencer par déterminer $P(Y \leq k)$ pour $k \in Y(\Omega)$

b. Montrer que : $E(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

2. a. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.

b. On note A l'événement : « il existe au moins un $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $X_i = 1$ ». Montrer que : $P(A) \geq 1 - \frac{1}{e}$.