Semaine de colles n°30 du 15/06/26 au 19/06/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

• Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

V – Couples de VA
- Couple de VA, Loi conjointe, lois marginales, covariance.
- Loi d'une composée
- Couple de VA indépendantes, espérance et variance.

VI – Généralisation au n-uplet de VA
- n-uplet de VA mutuellement indépendantes, lemme des coalitions
- Loi binomiale comme somme de loi de Bernoulli de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

• Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)

II – Notion de développements limités
- Développements limités au voisinage de 0, d'un point a quelconque, unicité de la partie régulière.
- Cas particulier des DL d'ordre 0 et 1 : lien avec la continuité (ou le prolongement par continuité) et la dérivabilité en a (de f ou de son prolongement)
- Propriétés : troncature, substitution, parité, lien avec les équivalents.
- Deux exemples : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \dots$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \dots$

III – Formule de Taylor Young et DL usuels
- Formule de Taylor Young (admise pour le moment).
- $DL_n(0)$ usuels : exp, ch, sh, cos, sin, $x \longmapsto (1+x)^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, **fixé**.

IV – Opérations sur les DL
- Somme, produit, composition, inverse, quotient. Ex : $DL_6(0)$ de tan par quotient **(*)**
- Développements limités d'une primitive. Ex : $DL_5(0)$ de la fonction arccosinus **(*)**
- $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$, $x \longmapsto \ln(1-x)$ et $x \longmapsto \arctan(x)$

  Ex : $DL_6(0)$ de la fonction tangente en utilisant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ **(*)**

NOUVEAU COURS :

• Comparaison locale des fonctions : Développements limités (Partie 2)

V – Applications des DL
- À l'étude locale des fonctions en un point : équivalents/limites, continuité/dérivabilité, tangente et sa position relative par rapport à Cf.
- À l'étude des branches infinies.

• Intégration sur un segment des fonctions continues

I – Fonctions en escalier sur un segment
- Subdivision d'un segment, fonctions en escalier sur un segment
- Approximation des fonctions continues sur un segment, par des fonctions en escalier. (th. admis)

II – Intégrale d'une fonction continue sur un segment
- Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment et propriétés
- Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, interprétation en termes d'aire (admis)

III – Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment
- Propriétés : linéarité, positivité et croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire.
- Soit f une fonction continue et de **signe constant** sur $[a, b]$. On a : $\int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Rq. Si f est continue, de signe constant sur $[a, b]$ et non nulle alors $\int_{[a,b]} f \neq 0$.

- Inégalité de la moyenne **(*)**, valeur moyenne d'une fonction.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Définition de $\int_a^b f$ avec a et b quelconques, propriétés restants valables si $a > b$, relation de Chasles.

IV – Lien entre intégrales et primitive d 'une fonction continue
- Primitive d'une fonction continue, lien primitives/intégrales.
- Étude de $x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{te^t}dt$: ensemble de définition, variations, étude en 0 (prolongement et dérivabilité du prolongement en 0), étude en $\pm\infty$. Une question de cours pourra être tout ou une partie de cet exemple **(*)**

V – Formules de Taylor
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

VI – Sommes de Riemann
- Méthodes des rectangles à droite et à gauche, sommes de Riemann.
-

VII – Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Déroulement d'une colle

1. Une ou deux questions de cours parmi :
   - celles signalées par (*)
   - calcul d'un DL avec produit et/ou quotient et/ou composée
2. Exercice(s)

Un cours non connu entraine une note < 10

Semaine de colles n°30 du 15/06/26 au 19/06/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 27

Exercice 1 : *Formule de la moyenne.*
Soit a et b deux réels tels que : $a < b$.

1. Soit f continue sur $[a, b]$. Montrer que : $\exists\, c \in [a, b],\quad f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$. (*valeur moyenne de f sur* $[a, b]$)

2. *Généralisation.*
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que g est positive sur $[a, b]$.
Montrer que : $\exists\, c \in [a, b],\ \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Exercice 5 : *Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.*
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, avec $a < b$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour avoir : $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$.

Exercice 6 :
Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$, positives telles que $fg \geq 1$. Montrer que : $\left(\displaystyle\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \geq 1$.

Exercice 8 :
1. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$

- **a.** Déterminer I_0, I_1 et $\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- **b.** Étudier la convergence de la suite (I_n)
- **c.** En déduire un équivalent de α_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 11 : *Lemme de Lebesgue.*
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Démontrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt = 0$.

Exercice 12 : Déterminer la limite des suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous pour avec $n \in \mathbb{N}^*$:

2. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$ **3.** $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(2n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 16 :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall\, x \in [0, +\infty[,\ 0 \leq f'(x) \leq 1$.
Démontrer que : $\forall\, x \in [0, +\infty[,\ \left(\displaystyle\int_0^x f\right)^2 \geq \int_0^x f^3$.