

CALCULS ET ORDRE DANS $\mathbb{R}$ **I – Fractions**

- $\forall (a, c) \in \mathbb{R}^2, \forall b \in \mathbb{R}^*, \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\forall (a, c) \in \mathbb{R}^2, \forall (b, d) \in (\mathbb{R}^*)^2, \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall (b, c, d) \in (\mathbb{R}^*)^3, \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

II – Puissances

- $\forall a \in \mathbb{R}, a^0 = 1, a^1 = a$ et $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$ et si $a \neq 0$, on a : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $a^n \times a^m = a^{n+m}$ et $(a^n)^m = a^{n \times m}$ et si $a \neq 0$, on a : $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a : $a^n \times b^n = (ab)^n$ et si $n \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$, on a : $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

III – Racines carrées

- Soit a un réel positif, le réel $\sqrt{a}$ est le réel positif qui élevé au carré donne a .
- $\forall a \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{a})^2 = a$ et $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^{+*}, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

IV – Développer et factoriser

- La multiplication est distributive sur l'addition :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a(b+c) = ab+ac$$

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

- Gestion du signe « moins » :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a-(b+c) = a-b-c, (a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd \quad \text{et si } d \neq 0, \text{ on a : } a - \frac{(b+c)}{d} = \frac{ad-b-c}{d}$$

- Identités remarquables

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{et} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

- Quantité conjuguée

La quantité conjuguée de $(a+b)$ est $(a-b)$ et la quantité conjuguée de $(a-b)$ est $(a+b)$.

Rq. Multiplier par la quantité conjuguée permet de faire apparaître une différence de carré.

$$\text{Ex. } \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

V – Équations du second degré

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ *discriminant de l'équation*.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et on peut en déduire le signe de $ax^2 + bx + c$

La somme des racines vaut $S = \frac{-b}{a}$ et le produit des racines $P = \frac{c}{a}$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ et on peut en déduire le signe de $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solutions réelles (mais deux solutions complexes conjuguées)
Le signe de $ax^2 + bx + c$ est le même que celui de a .

VI – Ordre dans $\mathbb{R}$

- Soit x et y deux réels, $x \leq y$ si et seulement si $y - x$ est positif.

• Propriétés de la relation $x \leq y$:

Pour tous réels x, y et z on a : $x \leq x$

$$x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y$$

$$x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \text{ (transitivité)}$$

• Règles pour la comparaison :

- ① Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence et utiliser les règles suivantes :

- La somme de deux réels positifs est positive.
- Le produit de deux réels de même signe est positif, le produit de deux réels de signes contraires est négatif.
- Un réel non nul et son inverse sont de même signe.
- Le carré d'un réel est positif et la racine carrée d'un réel positif est positive.

- ② Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et que leurs racines carrées.

- ③ Deux réels positifs, non nuls, sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse : $0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

• Règles pour transformer les inégalités :

- ① On peut ajouter un réel quelconque aux deux membres d'une inégalité :

$$\text{Pour } x, y \text{ et } z \text{ réels, on a : } x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

- ② On peut multiplier par le même réel quelconque les deux membres d'une inégalité, sans changer son sens si ce nombre est positif, en changeant son sens s'il est négatif :

$$\text{Pour } x, y \text{ et } z \text{ réels, on a : } x \leq y \text{ et } z \geq 0 \Rightarrow x \times z \leq y \times z \quad \text{et} \quad x \leq y \text{ et } z \leq 0 \Rightarrow x \times z \geq y \times z$$

- ③ On peut ajouter membre à membre deux inégalités **de même sens** :

$$\text{Pour } a, b, c \text{ et } d \text{ réels, on a : } a \leq b \text{ et } c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$$

- ④ On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **portant sur des réels positifs** :

$$\text{Pour } a, b, c \text{ et } d \text{ réels, on a : } 0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \leq d \Rightarrow a \times c \leq b \times d$$