

	Objectif	Compétence
1 — Évaluer les performances d'un système continu à partir de la courbe de sa réponse		
☐	Identifier la nature des flux d'information traversant le système : logique, numérique, analogique	A2-03
☐	Caractériser un constituant de la chaîne d'information : le capteur	A3-06
☐	Identifier la structure d'un système asservi	A3-10
☐	Distinguer poursuite et régulation	A3-10
☐	Modéliser le signal d'entrée par un signal canonique : impulsion, échelon, rampe, signal périodique	B2-05
☐	Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances d'un système asservi	C1-01
☐	Déterminer les performances d'un système asservi à partir de sa réponse temporelle : stabilité, précision, rapidité, amortissement	C2-03
2 — Modéliser un système linéaire, continu et invariant		
☐	Identifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un modèle	B1-02
☐	Identifier les paramètres d'un modèle	B1-03
☐	Identifier et justifier les hypothèses nécessaires à la modélisation	B1-04
☐	Établir un modèle de connaissance sous forme d'équation différentielle et vérifier la causalité	B2-04
☐	Utiliser les transformées de Laplace usuelles et leurs propriétés	B2-04
☐	Établir la fonction de transfert d'un système et la mettre sous forme canonique : gain, ordre, classe, pôles et zéros	B2-04
☐	Préciser les limites de validité d'un modèle : point de fonctionnement, non-linéarités, retard pur	B3-02 *
☐	Proposer une démarche permettant d'évaluer la précision d'un système	C1-01
3 — Modéliser la structure d'un système asservi par schéma-blocs		
☐	Identifier la structure d'un système asservi	A3-10
☐	Établir le schéma-blocs organique d'un système asservi dans le domaine de Laplace	B2-07
☐	Déterminer la fonction de transfert globale : blocs en série, chaîne directe et chaîne de retour, boucle ouverte et boucle fermée	B2-07
☐	Manipuler et réduire un schéma-blocs : déplacement des sommateurs et des points de prélèvement	B2-07
☐	Déterminer l'influence d'une perturbation par le théorème de superposition	C2-03

L'essentiel — Séquence 2 – Asservissement

Définition — Systèmes asservis ou asservissements. Un système asservi est un système automatisé qui :

- Comporte au moins un capteur permettant l'observation en continu de l'évolution de la sortie.
- Compare en continu l'évolution de l'image de cette sortie et de l'image de la consigne pour créer un signal d'écart.
- Traite le signal d'écart pour modifier en continu le signal commande afin d'atteindre l'objectif défini par la consigne.

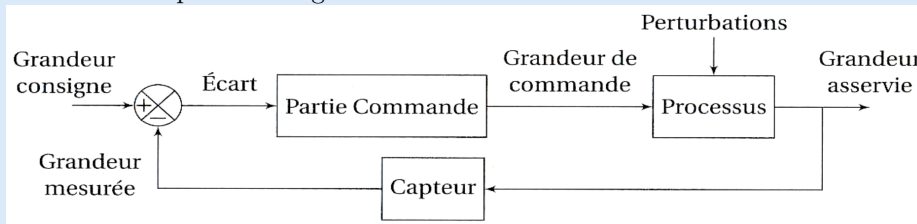


Figure 1 — Structure d'un système asservi

Définition — Système régulateur. Un système asservi de type régulateur a une grandeur de consigne qui a vocation à rester le plus souvent constante : le rôle de l'asservissement est alors principalement de lutter contre les perturbations.

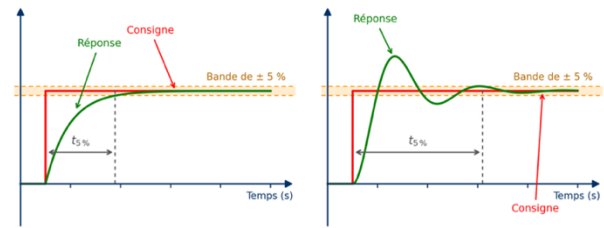
Définition — Système suiveur. Un système asservi de type suiveur a une grandeur de consigne qui a vocation à évoluer au cours du temps : le rôle de l'asservissement est alors principalement de suivre la consigne.

Performances :

Critère, définition et indicateur	Allure de la réponse
Stabilité Un système est stable si, pour une entrée en échelon, la grandeur de sortie converge vers une valeur finale constante (lorsque $t \rightarrow \infty$). Attention ! L'erreur statique ne peut être déterminée que si les grandeurs d'entrée et de sortie sont de même dimension (même unité).	
Précision La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée. Dans le cas d'une consigne en échelon, elle est mesurée par l'erreur en régime permanent, appelée aussi erreur statique : $\mu_s = e_r(\infty) = \Delta e(\infty) - \Delta s(\infty)$ l'erreur statique relative est définie par : $e_{r\%}(\infty) = \left \frac{e_r(\infty)}{\Delta e(\infty)} \right $	
Rapidité	

Le temps nécessaire pour que la sortie atteigne une valeur *suffisamment proche* de sa valeur finale et ne s'en écarte plus.

Temps de réponse à 5 % : plus petit t_5 % tel que la sortie reste dans la bande
 $[s(+\infty) - 0,05 \cdot \Delta s(+\infty) ; s(+\infty) + 0,05 \cdot \Delta s(+\infty)]$



Amortissement

La réponse d'un système présente des **dépassements** si elle dépasse la valeur à convergence avant de converger.

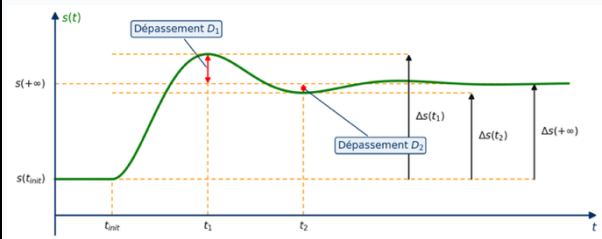
Le **dépassement absolu d'ordre k** est défini par :

$$D_k = |\Delta s(t_k) - \Delta s(+\infty)|$$

où t_k est l'instant du k -ième dépassement.

Le **dépassement relatif d'ordre k** est défini par :

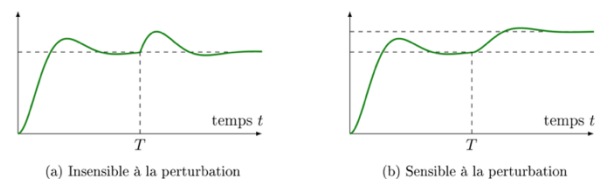
$$D_{k\%} = \left| \frac{D_k}{\Delta s(+\infty)} \right|$$



Sensibilité aux perturbations

Un système est dit **sensible aux perturbations** s'il ne converge pas vers la même valeur selon que la perturbation est présente ou non.

Écart entre les valeurs finales atteintes **avec** et **sans** perturbation ; nul $\Rightarrow$ système insensible.



L'erreur relative en régime permanent, ou **erreur statique relative** est définie par :

$$e_{r\%}(\infty) = \left| \frac{e_r(\infty)}{\Delta e(\infty)} \right|$$

Définition – exemples de non-linéarités classiques

	Saturation	Seuil	Hystérésis
Courbe caractéristique			
Exemples	Butée mécanique, alimentation, moteur électrique...	Frottements dans un moteur	Jeux mécaniques, matériaux (élastomères), cycles magnétiques...

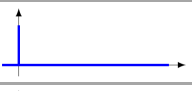
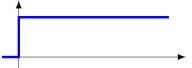
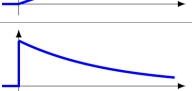
Définition — Conditions de Heaviside. Une fonction du temps $e(t)$ vérifie les conditions de Heaviside si elle vérifie : $e(0^-) = 0$, $\dot{e}(0^-) = 0$, $\ddot{e}(0^-) = 0$... c'est à dire si les conditions initiales sont nulles et le système au repos pour $t < 0$.

Définition. $u(t)$ est la fonction **échelon unité** (ou **échelon de Heaviside**). C'est la fonction échelon unitaire en zéro :

Si $t < 0$ alors $u(t) = 0$

Si $t \geq 0$ alors $u(t) = 1$

Propriété — Transformées de Laplace de signaux usuels. (à connaître par cœur !)

	$x(t)$	$X(p)$
	Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
	Échelon d'amplitude A : $A u(t)$	$\frac{A}{p}$
	Rampe de pente b : $b t u(t)$	$\frac{b}{p^2}$
	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété	$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
Linéarité	$a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$	$a \cdot F(p) + b \cdot G(p)$
Dérivation	$f'(t)$	$p \cdot F(p)$
	$f''(t)$	$p^2 \cdot F(p)$
	$f^{(n)}(t)$	$p^n \cdot F(p)$
Intégration	$\int_0^t f(x) dx$	$F(p) / p$
Retard pur	$f(t - \tau)$	$e^{-\tau p} \cdot F(p)$
Valeur initiale	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$
Valeur finale	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$	$\lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot F(p)$

Soit le modèle traduisant la relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ d'un SLCI sous la forme d'une équation différentielle :

$$e(t) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow s(t)$$

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt}(t) + \dots + b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t)$$

Définition — **Fonction de transfert.** On appelle fonction de transfert la fraction :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

La fonction de transfert d'un système est le modèle de ce système dans le domaine de Laplace. Si $H(p)$ est une fonction de transfert, alors : $S(p) = H(p) \cdot E(p)$, ce que l'on peut exprimer sous la forme d'un schéma-blocs :

$$E(p) \rightarrow \boxed{H(p)} \rightarrow S(p)$$

Définition - Forme canonique d'une fonction de transfert. La forme canonique consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes pour écrire la fonction de transfert sous la forme de référence suivante :

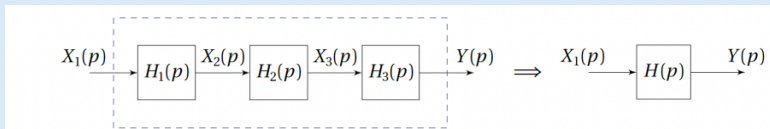
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots + \dots p^m}{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots + \dots p^{n-\alpha}}$$

K : gain du modèle
 α : classe du système
 n : ordre du système

n , l'ordre du système est la plus haute puissance de p présente au dénominateur. Il correspond également au degré maximal de dérivation dans l'équation différentielle associée.

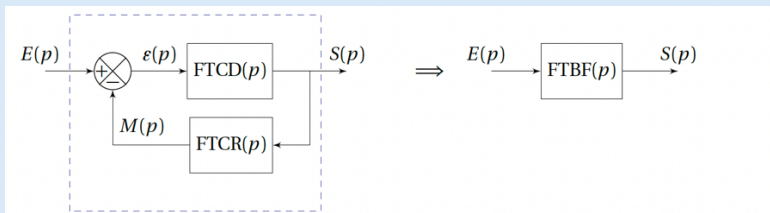
α , la classe du système est la plus faible puissance de p présente au dénominateur.

Association de blocs en série :



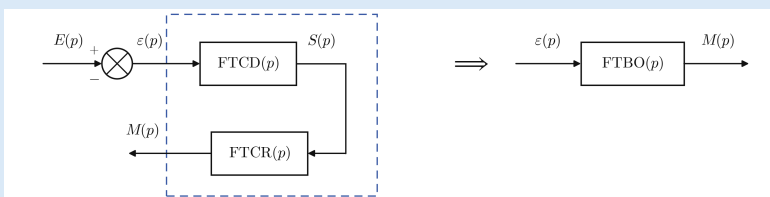
$$\boxed{H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}$$

Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF), Formule de Black :



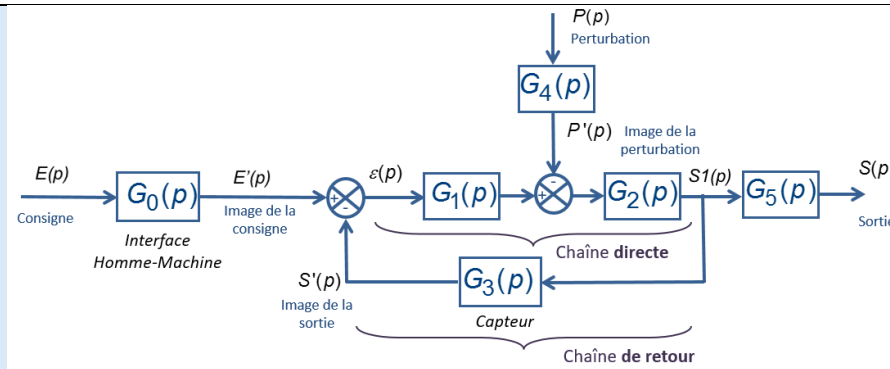
$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p) FTCT(p)}$$

Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) :



$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = FTCD(p) \cdot FTCT(p)$$

Méthode — FTBO, FTBF, fonction de transfert globale .



Les termes FTBO, FTBF, chaîne directe et chaîne retour ne sont employés que dans le cas d'un schéma-blocs comprenant uniquement une boucle de rétroaction (et aucun bloc avant ou après). Par exemple, dans le schéma général ci-dessus :

- $FTBF(p) = \frac{S_1(p)}{E'(p)}$ (Fonction de Transfert en Boucle Fermée)
- $FTBO(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)}$ (Fonction de Transfert en Boucle Ouverte)
- $FTCD(p) = \frac{S_1(p)}{\varepsilon(p)}$ (Fonction de Transfert de la Chaîne Directe)
- $FTCR(p) = \frac{S'(p)}{S_1(p)}$ (Fonction de Transfert de la Chaîne Retour)
- On peut également définir une fonction de transfert globale : $FT_{globale} = \frac{S(p)}{E(p)}$

Propriété — Théorème de superposition. La sortie d'un système à plusieurs entrées est obtenue en additionnant toutes les réponses élémentaires. Une réponse élémentaire est obtenue en n'ayant qu'une seule entrée non nulle. Sur le schéma-blocs ci-dessus, on a par exemple :

$$S(p) = E(p)H_1(p) + P(p)H_2(p)$$

avec $H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)}|_{P=0}$ et $H_2(p) = \frac{S(p)}{P(p)}|_{E=0}$

Algèbre de schéma-blocs : bien comprendre les équations représentées par les blocs avant de les déplacer, ne rien apprendre par cœur et s'entraîner sur des exemples.

Librement inspiré du cours de Charles Paillet

Table des matières

1 ÉVALUER LES PERFORMANCES D'UN SYSTEME CONTINU A PARTIR DE LA COURBE DE SA REPONSE	8
1.1 DEFINITIONS ET MISE EN SITUATION.....	8
1.2 STRUCTURE D'UN SYSTEME AUTOMATISE	8
1.2.1 INFORMATIONS DISCRETES ET INFORMATIONS CONTINUES	8
1.2.2 LES SYSTEMES CONTINUS.....	9
1.3 EXEMPLE DE STRUCTURE D'UN SYSTEME ASSERVI	10
1.4 PERFORMANCES D'UN SYSTEME CONTINU	12
1.4.1 ENTREES TEST.....	12
1.4.2 PRECISION	13
1.4.3 RAPIDITE	15
1.4.4 STABILITE	16
1.4.5 AMORTISSEMENT.....	16
1.4.6 SENSIBILITE AUX PERTURBATIONS.....	17
1.4.7 EXEMPLES D'APPLICATIONS	18
2 MODELISER UN SYSTEME LINEAIRE, CONTINU ET INVARIANT	19
2.1 SYSTEME LINEAIRE, CONTINU ET INVARIANT (SLCI)	19
2.2 MODELISATION	20
2.3 UN OUTIL : LA TRANSFORMEE DE LAPLACE.....	22
2.3.1 DEFINITION.....	22
2.3.2 PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE [TL].....	24
2.3.3 FONCTION DE TRANSFERT	25
2.4 EXEMPLE DE VALIDATION D'UNE PERFORMANCE D'UN SYSTEME : PRECISION	26
3 MODELISER LA STRUCTURE D'UN SYSTEME ASSERVI PAR SCHEMA-BLOCS.....	28
3.1 DE LA STRUCTURE CHAINE DE PUISSANCE/CHAINE D'INFORMATION AU SCHEMA-BLOCS	28
3.1.1 LIEN ENTRE LA CHAINE DE PUISSANCE ET D'INFORMATION ET LE SCHEMA-BLOCS.....	28
3.1.2 STRUCTURE DU SCHEMA-BLOCS D'UN SYSTEME ASSERVI	29
3.2 DU SCHEMA-BLOCS A LA FONCTION DE TRANSFERT	30
3.2.1 ASSOCIATION DE BLOCS	30
3.2.2 DEPLACEMENT DES POINTS DE JONCTION ET DES SOMMATEURS	33

1 Évaluer les performances d'un système continu à partir de la courbe de sa réponse

1.1 Définitions et mise en situation

Un système est un ensemble de composants interagissant entre eux en vue de réaliser des fonctions données. Un système de commande est un système dont la fonction principale est de piloter une grandeur de sortie en fonction d'une consigne d'entrée.

Définition. Un **système automatisé** est un système dont la fonction principale est d'assurer une tâche sans intervention humaine.

Les systèmes automatisés remplacent l'homme dans des opérations dangereuses, répétitives ou pénibles : robot aspirateur, boîte de vitesses automatique, contrôle des cuves dans une centrale nucléaire... Ils permettent également d'augmenter la précision et la productivité. L'intervention humaine se limite alors à la programmation de l'unité de commande, à la mise en marche et au réglage de certains paramètres.

Remarque. Bien que de nombreux systèmes utilisent aujourd'hui des échanges et un traitement de l'information sous forme numérique, on se limitera dans les deux prochaines séquences à l'étude de **signaux continus**.

1.2 Structure d'un système automatisé

Un système automatisé peut être décomposé de manière simplifiée en trois grandes parties :

- Partie opérative (PO) : elle assure la conversion de puissance et l'action
- Partie commande (PC) : elle assure la mesure en continu sur le processus, le traitement des données par comparaison aux consignes et le pilotage de la partie opérative.
- Interface homme-machine (IHM) : elle permet de définir les consignes et de surveiller l'évolution du système.



Figure 1-1— Système automatisé

1.2.1 Informations discrètes et informations continues

Définition. Une **information discrète** ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Une information discrète peut prendre deux formes :

Information logique

Cette information est associée à l'état d'une variable qui ne peut prendre que deux valeurs (vrai/faux, noir/blanc, présence/absence, 0/1 ...). L'information logique est aussi appelée **binaire** ou « tout ou rien » (**TOR**).

Information numérique

Cette information est généralement issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'informations analogiques à l'aide d'un **CAN** (Convertisseur Analogique–Numérique). L'information numérique s'écrit sous la forme d'un mot binaire, constitué de plusieurs bits.

Définition. Une information **analogique** peut prendre toutes les valeurs possibles dans un intervalle de définition, de manière continue.

Un signal analogique est donc représentable par une courbe continue. Les grandeurs physiques telles que la tension, la température ou la pression sont des exemples typiques d'informations continues.

Exemple : Les différents types d'information sur une voiture

Type d'information	Exemple sur la voiture	
Logique (TOR)	Le voyant "Ceinture non attachée" ou le capteur de porte ouverte	
Numérique	La vitesse affichée sur le compteur numérique (issue d'un CAN/Calculateur)	
Analogique	La tension produite par la sonde de température moteur	

1.2.2 Les systèmes continus

Nous traitons dans ce chapitre des systèmes asservis qui gèrent des grandeurs analogiques.

Définition — Un système asservi est un système automatisé qui :

- comporte au moins un **capteur** permettant l'observation de la sortie ;
- compare en permanence l'image de la sortie avec celle de la **consigne**, afin de générer un **signal d'écart** ;
- **traite** ce signal d'écart pour ajuster le signal de **commande** et atteindre l'objectif défini par la consigne.

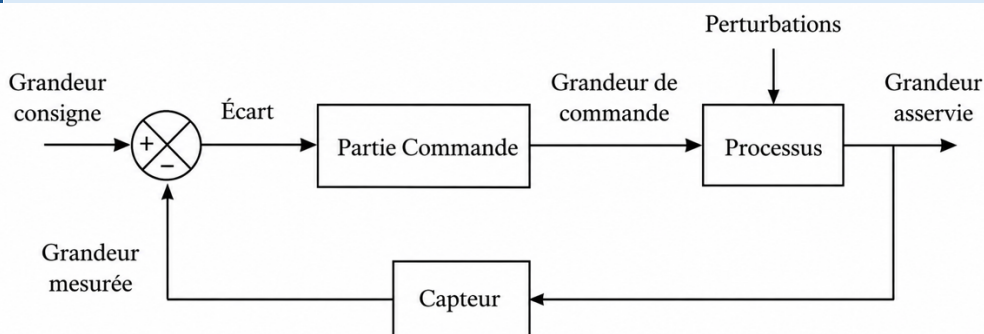


Figure 1-2— Structure d'un système asservi

Les systèmes asservis peuvent être classés en deux grandes familles :

Définition — Système régulateur. Un système régulateur est un asservissement dont la grandeur de consigne reste **constante** la plupart du temps. Son rôle principal est de compenser les **perturbations**.

Définition — Système suiveur. Un système suiveur est un asservissement dont la grandeur de consigne est **évolutive**. Son rôle est de suivre cette consigne aussi fidèlement que possible.

Exemple : Systèmes régulateurs et suiveurs

Mode de Fonctionnement	Système / Application	Consigne (Entrée)	Grandeur Commandée (Sortie)
	Régulateur de vitesse (Automobile)	Vitesse désirée fixe (ex: 110 km/h)	Vitesse réelle du véhicule
	Climatisation / Chauffage	Température de consigne (ex: 20 °C)	Température ambiante
	Niveau d'eau (Château d'eau)	Hauteur d'eau constante h_0	Niveau d'eau réel $h(t)$
	Robot de soudage industriel	Trajectoire spatiale variable $(x(t), y(t), z(t))$	Position réelle du bras robot
	Tracker solaire (Panneau PV)	Angle de position du soleil $\theta_{\text{soleil}}(t)$	Orientation angulaire du panneau
	Direction assistée (Automobile)	Angle appliqué au volant $\theta_{\text{volant}}(t)$	Angle d'orientation des roues

1.3 Exemple de structure d'un système asservi

Un utilisateur peut commander directement un système en fonction de son ressenti (le système n'est alors pas automatisé).

Définition — Commande en chaîne directe. Un système fonctionne en **chaîne directe** s'il n'y a pas de contrôle sur la manière dont la commande est exécutée : la sortie n'est pas mesurée, donc aucune correction n'est possible (figure 1.3).

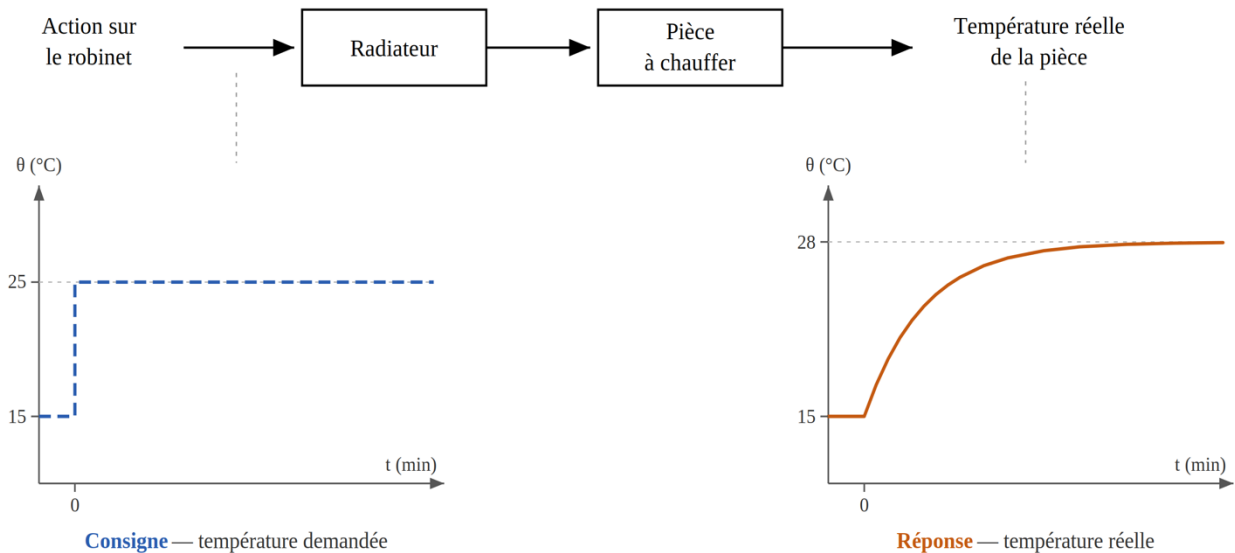


Figure 1-3 - Contrôle de la température d'une pièce en chaîne directe : la réponse n'atteint pas la consigne

Cependant, lorsque le système est perturbé par un événement extérieur, la valeur de la sortie peut s'écarter fortement de la valeur attendue (figure 1.3).

Définition — Perturbation. Une **perturbation** est une grandeur d'entrée supplémentaire, non contrôlée par l'utilisateur, qui agit sur le système.

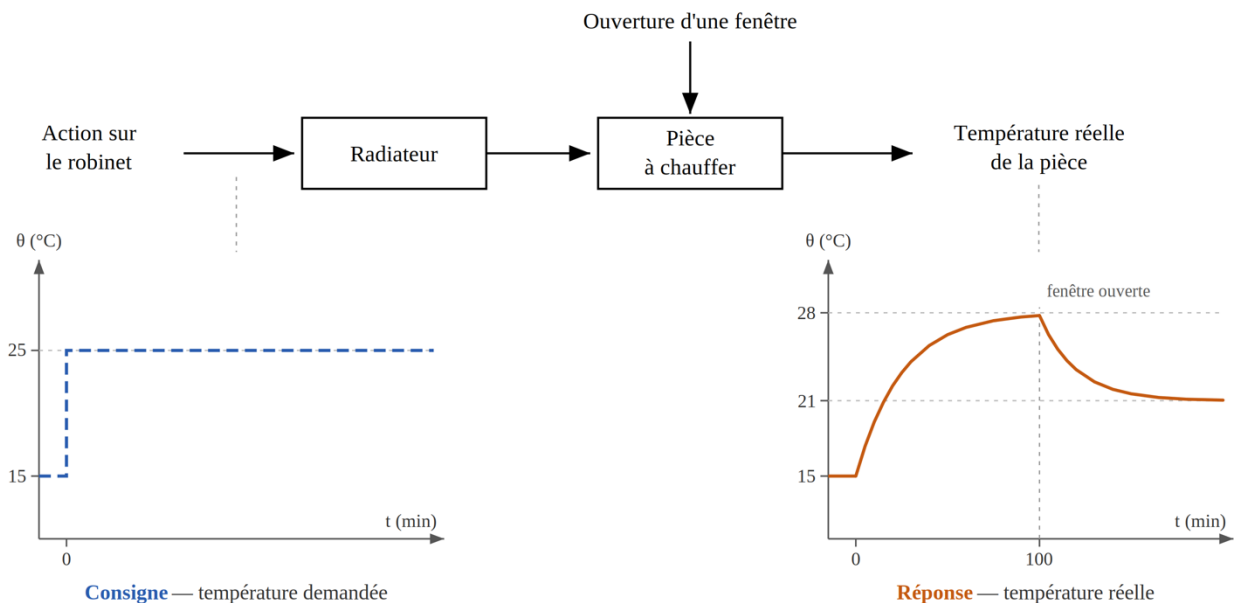


Figure 1-4 — Contrôle de la température d'une pièce en chaîne directe avec action d'une perturbation : la réponse décroche durablement

Pour automatiser le système sans intervention humaine (sans action permanente sur le robinet dans l'exemple), on introduit une **boucle de retour** (ou **rétroaction**).

Définition — Commande en boucle fermée (BF). Un système fonctionne en **boucle fermée** si la sortie est mesurée, comparée en permanence à la **consigne**, et si cette comparaison génère un **signal d'écart** qui agit sur la commande du système.

La boucle de retour, constituée d'un ou plusieurs **capteurs**, permet d'évaluer la sortie (grandeur d'intérêt) à chaque instant. Cette information est transmise à la partie commande, qui la compare à la consigne et élabore alors le signal de **commande** pilotant la partie opérative.

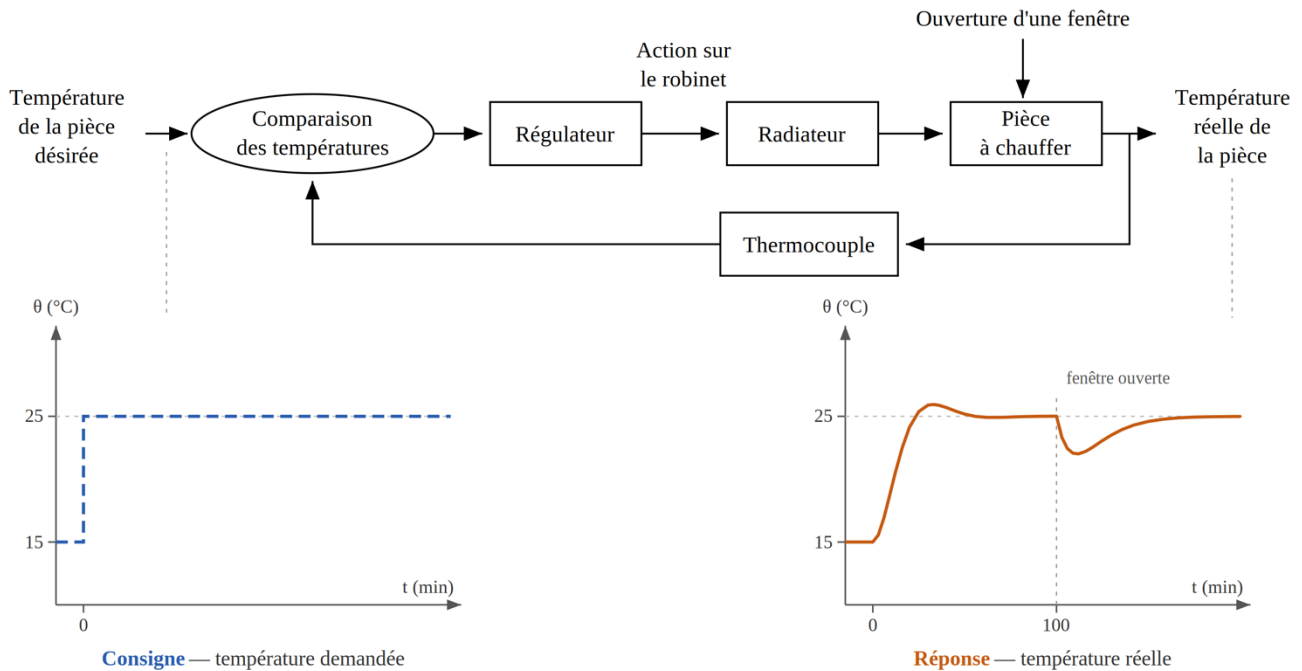


Figure 1-5— Régulation du chauffage d'une pièce : système en boucle fermée, la réponse rejoint la consigne malgré la perturbation

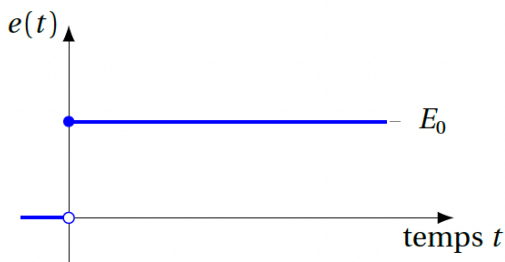
Dans l'exemple de la figure 1.5, la consigne correspond à la température désirée, fixée par le thermostat. Elle est comparée à la température réelle de la pièce, mesurée par un thermocouple. En fonction de l'écart entre ces deux valeurs, le régulateur déclenche une action correctrice : il ajuste le robinet de chauffage, avec une amplitude et un sens adaptés à l'erreur constatée.

1.4 Performances d'un système continu

1.4.1 Entrées test

Les performances d'un système sont évaluées expérimentalement, ou prédites par simulation, lorsqu'il est soumis à des signaux tests en entrée.

L'échelon : signal constant, défini par $e(t) = E_0 u(t)$ (échelon d'amplitude E_0) :



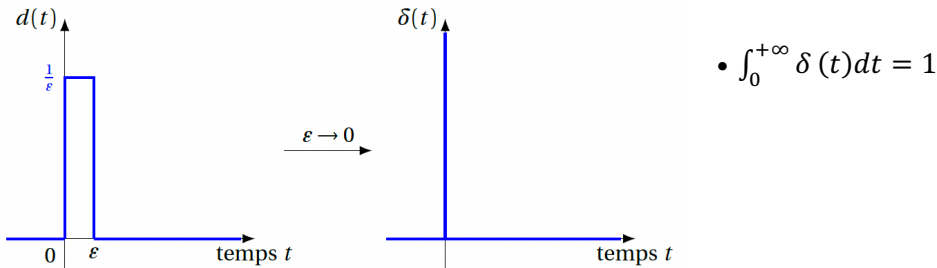
- Si $t < 0$ alors $e(t) = 0$
- Si $t \geq 0$ alors $e(t) = E_0$
- $u(t)$: fonction échelon de Heaviside

Définition. La fonction échelon unitaire ou échelon de Heaviside, notée $u(t)$, est définie par :
 $u(t) = 0$ si $t < 0$,

$u(t) = 1$ si $t \geq 0$.

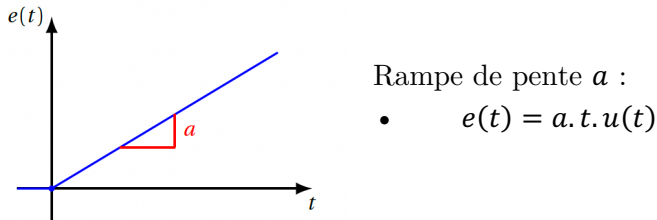
C'est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, +\infty[$.

L'impulsion (ou dirac) : entrée très brève, $e(t) = \delta(t)$

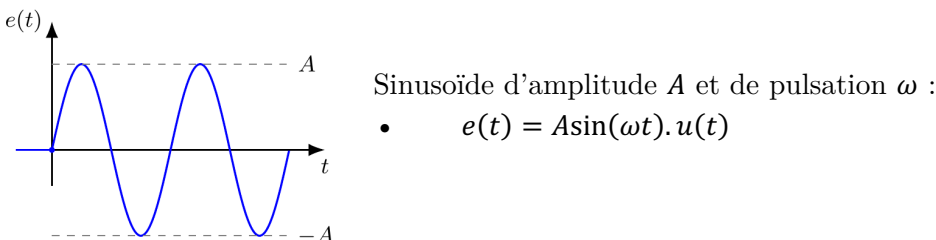


Définition. Le **Dirac** $\delta(t)$ est une fonction idéale, définie comme la limite d'un créneau d'aire unitaire lorsque sa durée tend vers zéro et que son amplitude tend vers l'infini. Elle modélise par exemple un choc.

La rampe : entrée linéairement variable



La sinusoïde :



Remarque. Les performances sont intrinsèques au système et ne dépendent pas du type d'entrée appliqué.

1.4.2 Précision

Notation. On définit les grandeurs suivantes associées à une entrée en échelon et à la réponse du système (voir figure 1.9) :

La valeur initiale de l'entrée est notée $e(t_{\text{init}})$ et celle de la sortie $s(t_{\text{init}})$.

Si $t_{\text{init}} = 0$, on parle alors de $e(0)$ et $s(0)$.

Les valeurs finales correspondent aux valeurs en régime permanent, c'est-à-dire lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$e(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t), \quad s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t).$$

La variation totale de l'entrée est :

$$\Delta e(+\infty) = e(+\infty) - e(t_{\text{init}}).$$

La variation totale de la sortie est :

$$\Delta s(+\infty) = s(+\infty) - s(t_{\text{init}}).$$

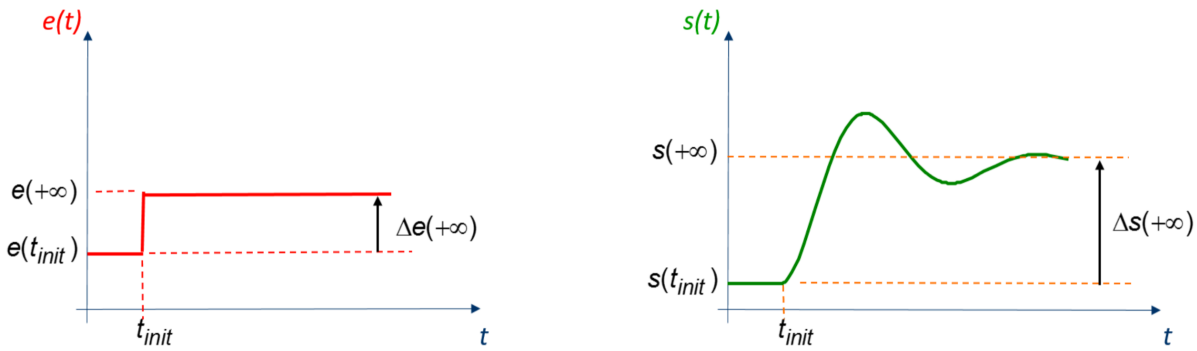


Figure 1-6— Signaux d'entrée (consigne) et de sortie (réponse) d'un système

Définition - Précision : erreur statique. La **précision** caractérise l'aptitude du système à atteindre la valeur visée. Dans le cas d'une consigne en échelon, elle est mesurée par l'**erreur en régime permanent**, appelée aussi **erreur statique** :

$$\mu_s = e_r(\infty) = \Delta e(\infty) - \Delta s(\infty).$$

Attention ! L'erreur statique n'a de sens que si les grandeurs d'entrée et de sortie sont de même nature et exprimées dans la même unité.

Remarque. Dans les cahiers des charges, on utilise souvent la valeur absolue de l'erreur statique :

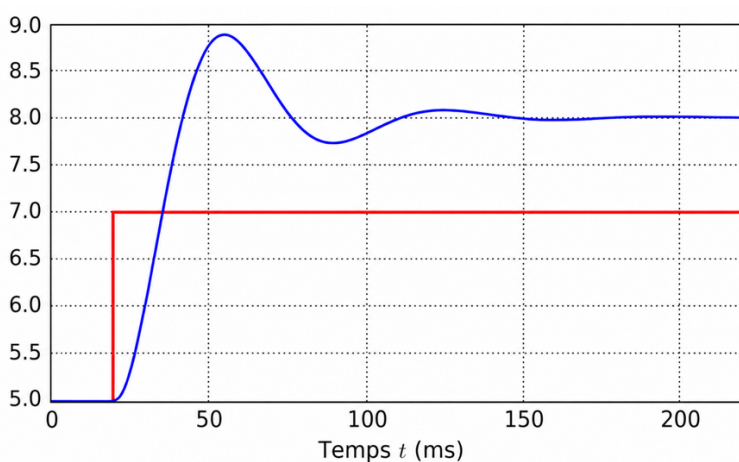
$$\mu_s = | \Delta e(\infty) - \Delta s(\infty) |.$$

Définition - Précision : erreur relative. L'erreur relative en régime permanent, ou erreur statique relative, est définie par :

$$e_{r\%}(\infty) = \left| \frac{e_r(\infty)}{\Delta e(\infty)} \right|.$$

Exemple. Déterminer l'erreur en régime permanent (ou erreur statique) $e_r(\infty)$ et l'erreur relative $e_{r\%}(\infty)$.

Le graphique ci-dessous représente la réponse d'un système à une consigne en échelon. On suppose que les grandeurs d'entrée et de sortie sont comparables.



1.4.3 Rapidité

Définition — Rapidité. La **rapidité** caractérise, pour une entrée en échelon, le temps nécessaire pour que la sortie atteigne une valeur *suffisamment proche* de sa valeur finale et ne s'en écarte plus.

On l'évalue classiquement par le **temps de réponse à 5 %** : c'est la durée nécessaire pour que la sortie entre dans une bande de $\pm 5\%$ autour de sa valeur finale, et y reste définitivement (figure 1.7).

La bande de $\pm 5\%$ est définie par l'intervalle :

$$[s(+\infty) - 0,05 \Delta s(+\infty), s(+\infty) + 0,05 \Delta s(+\infty)].$$

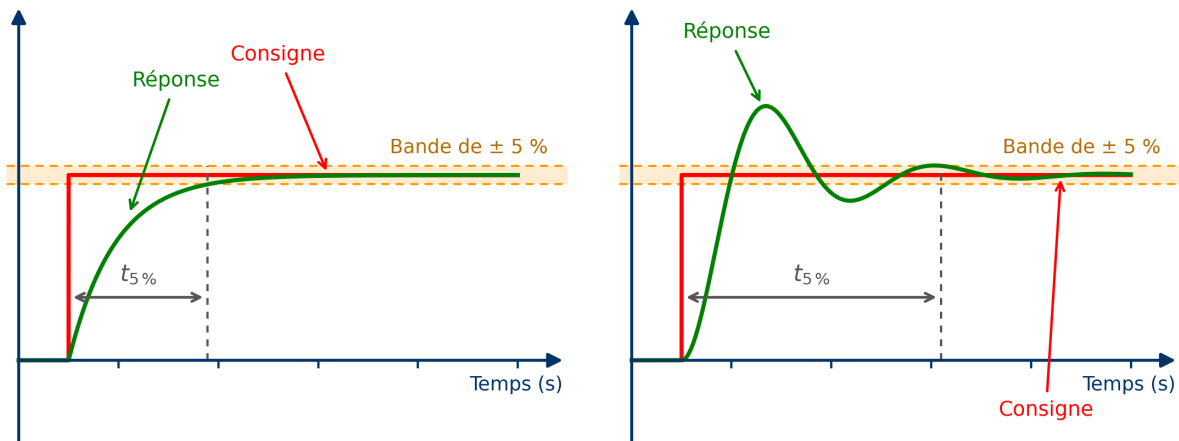
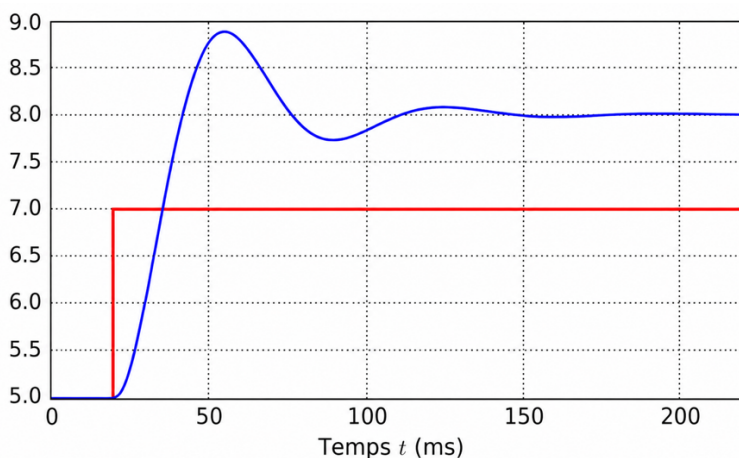


Figure 1-7— Rapidité des systèmes

Exemple : Déterminer le temps de réponse à 5 % du système.



1.4.4 Stabilité

Le régime permanent correspond au moment où le signal de sortie est établi.

Définition — Stabilité au sens EB/SB. Un système est dit **stable** si, pour toute entrée bornée (EB), sa sortie reste bornée (SB).

Remarque. Cette définition, bien que mathématiquement rigoureuse peut prêter à confusion : un système qui oscille indéfiniment mais sans divergence est stable au sens EB/SB, mais il ne l'est pas forcément au sens attendu en automatique. On parle alors de système « quasi-stable ».

Définition — Stabilité en automatique. Un système est dit **stable** si, pour une entrée en échelon, sa sortie converge vers une valeur finale constante lorsque $t \rightarrow \infty$ (voir figure 1.8).

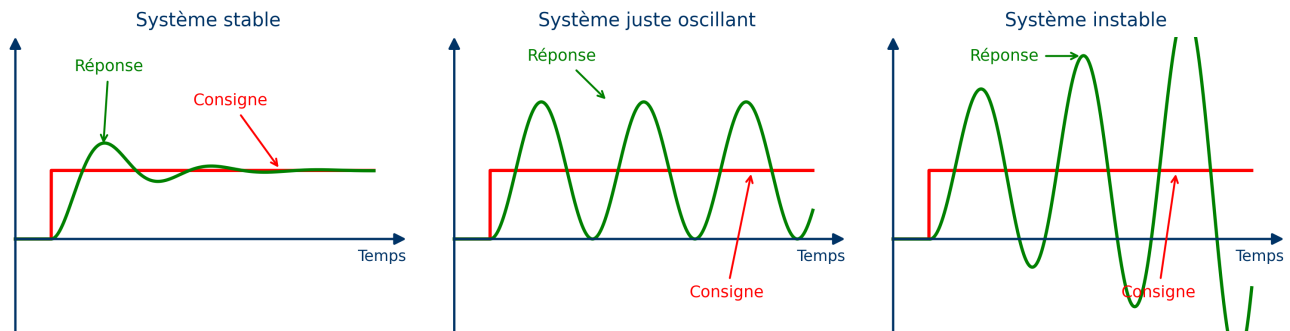


Figure 1-8— Stabilité des systèmes

Remarque. La stabilité est la première performance à évaluer : un système instable est inutilisable.

1.4.5 Amortissement

Définition — Dépassements. La réponse d'un système présente des **dépassements** si elle franchit la valeur finale visée avant de converger.

Le **dépassement absolu d'ordre k** est défini par :

$$D_k = |\Delta s(t_k) - \Delta s(+\infty)| = |s(t_k) - s(+\infty)|,$$

où t_k est l'instant du k -ième dépassement.

Le **dépassement relatif d'ordre k** est défini par :

$$D_{k\%} = \left| \frac{D_k}{\Delta s(+\infty)} \right|.$$

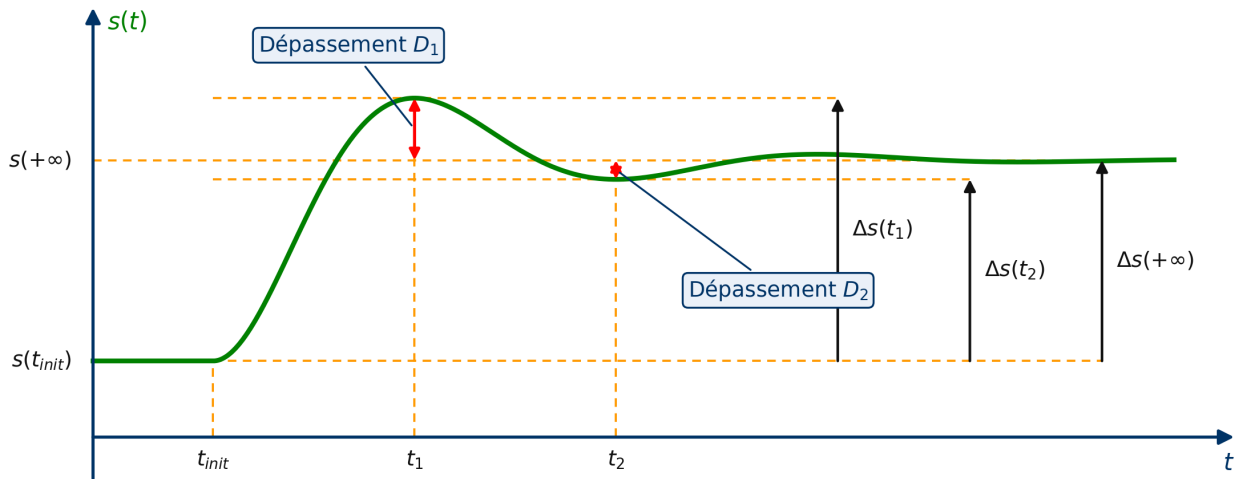
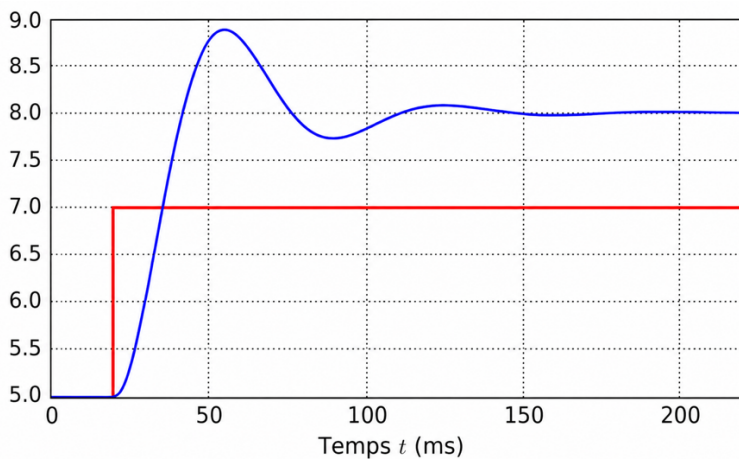


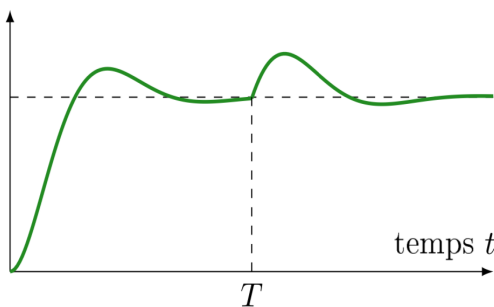
Figure 1-9— réponse présentant des dépassements

Attention ! Les dépassements ne sont pas évalués par rapport à la valeur de consigne en entrée, mais bien par rapport à la **valeur finale atteinte par la sortie**.

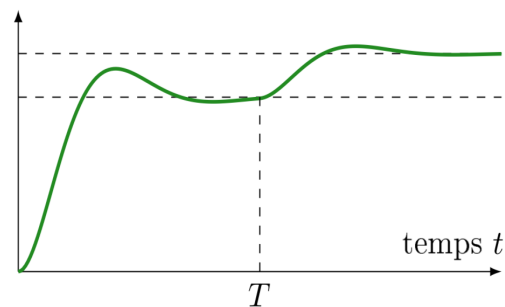
Exemple. Le graphique ci-dessous représente la réponse d'un système soumis à une consigne en échelon. Déterminer les deux premiers dépassements absolus et relatifs.



1.4.6 Sensibilité aux perturbations



(a) Insensible à la perturbation



(b) Sensible à la perturbation

Figure 1-10— Influence d'une perturbation apparaissant à l'instant T sur la réponse d'un système

Définition. Un système est dit **sensible aux perturbations** s'il ne converge pas vers la même valeur selon que la perturbation est présente ou non (voir figure 1.10).

1.4.7 Exemples d'applications

Cas où les dépassements sont critiques.

Dans certaines applications, tout dépassement est à proscrire :

- Usinage : un dépassement de consigne entraîne une coupe trop profonde, et donc une pièce non conforme ;
- Remplissage de réservoirs : risque de débordement du fluide ;
- Arrimage de la capsule *Soyouz* à la station spatiale internationale (ISS) : risque de collision ;
- Robot chirurgical : un dépassement peut endommager des tissus vitaux.

Cas où la précision doit être excellente.

Certaines applications exigent que la sortie corresponde très exactement à la consigne :

- Robot chirurgical (précision millimétrique indispensable) ;
- Pilote automatique de navire ou d'avion.

Cas où la rapidité est primordiale.

Dans d'autres situations, la vitesse de réaction est le critère déterminant :

- Systèmes d'arrêt d'urgence ;
- Systèmes de sécurité (ouvertures de portes automatiques, déclenchement d'airbags, etc.).

Un système automatisé idéal serait donc à la fois stable, précis et rapide, avec un régime transitoire bien amorti. En pratique, ces critères de performance sont souvent en concurrence et nécessitent un compromis selon l'application.

2 Modéliser un système linéaire, continu et invariant

2.1 Système Linéaire, Continu et Invariant (SLCI)

Dans le cadre du programme, et pour des raisons de simplicité, nous nous limiterons aux systèmes **linéaires, continus, invariants** et **monovariables**.

Définition — Système monovisible. Un système est dit **monovisible** lorsqu'il ne possède qu'une seule entrée et une seule sortie.

Définition — Système linéaire. Un système est dit **linéaire** s'il satisfait simultanément aux deux principes suivants :

proportionnalité : la sortie est proportionnelle à l'entrée ;

superposition : la réponse à une somme d'entrées est la somme des réponses individuelles.

Proportionnalité.

Soit $s(t)$ la réponse à l'entrée $e(t)$ et $k \in \mathbb{R}$:

$$k \cdot e(t) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow k \cdot s(t).$$

Superposition.

Soient $s_i(t)$ les réponses aux entrées $e_i(t)$, pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$e_i(t) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow s_i(t).$$

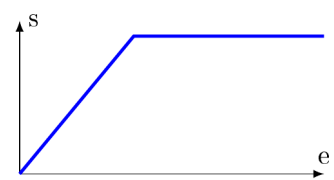
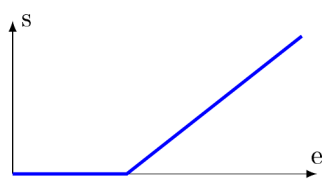
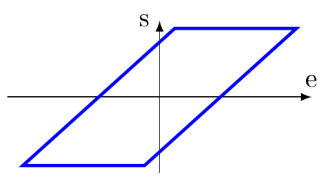
Alors, pour une entrée $e(t) = \sum_{i=1}^N e_i(t)$, on a :

$$e(t) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t).$$

Ainsi, la sortie d'un système soumis à plusieurs entrées (ou perturbations) peut être calculée en additionnant les réponses aux entrées appliquées séparément : c'est l'hypothèse de **linéarité**.

Remarque. Cette hypothèse est souvent restrictive : de nombreux systèmes réels présentent en réalité des comportements non-linéaires (saturation, frottements secs, hystérésis...).

Définition — Exemples de non-linéarités classiques.

	Saturation	Seuil	Hystérésis
Courbe caractéristique			
Exemples	Butée mécanique, alimentation, moteur électrique...	Frottements dans un moteur	Jeux mécaniques, matériaux (élastomères), cycles magnétiques...

Remarque — Linéarisation d'un système non linéaire. La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'application. Cependant, lorsqu'un système est utilisé dans une zone réduite de son domaine, il est possible de linéariser sa réponse autour d'un **point de fonctionnement**.

Cette approximation correspond à la **tangente** en ce point, et est appelée *approximation linéaire tangente* (figure 2.1).

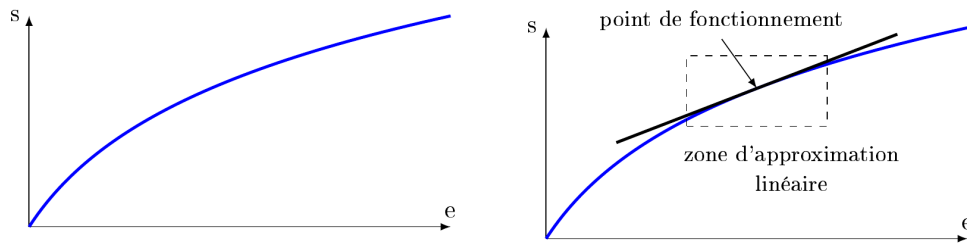


Figure 2-1— Linéarisation d'un système non linéaire au voisinage d'un point de fonctionnement

Il est également fréquent d'effectuer une **régression linéaire** au sens des moindres carrés (voir programme de 2 année).

Définition — Système continu. Un système est dit **continu** si ses fonctions d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant t . Les signaux associés sont alors qualifiés d'**analogiques**.

Dans les systèmes de commande modernes, l'information est souvent traitée de manière numérique par un microcontrôleur. Cela nécessite une opération de **numérisation** des signaux continus, c'est-à-dire :

un **échantillonnage en temps**, consistant à prélever la valeur du signal à intervalles réguliers (considérée ensuite comme constante durant l'intervalle) ;

une **quantification en amplitude**, qui mémorise la mesure sur N niveaux discrets, en l'arrondissant à la valeur accessible la plus proche.

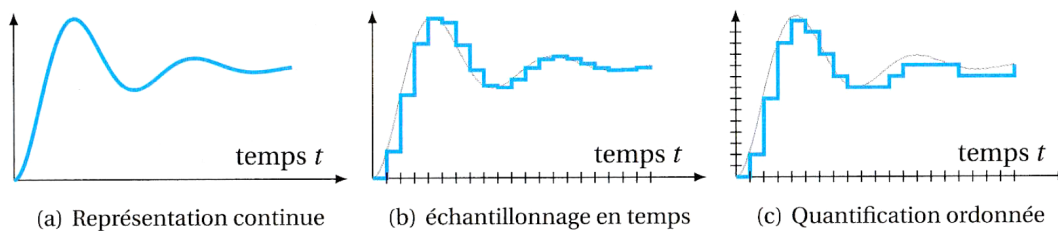


Figure 2-2— De gauche à droite : signal continu (a), signal échantillonné (b), signal quantifié (c).

Remarque. En pratique, la période d'échantillonnage est très souvent beaucoup plus petite que le temps de réponse du système (par exemple $5 \mu s$ pour l'échantillonnage contre quelques millisecondes pour le processus). On peut alors assimiler le comportement à celui d'un système continu.

Définition — Système invariant. Un système est dit **invariant** lorsque ses caractéristiques de comportement ne dépendent pas du temps.

Autrement dit, si une même entrée est appliquée à deux instants distincts alors les deux réponses temporelles seront identiques, simplement décalées dans le temps. Soit $s(t)$ la réponse à l'entrée $e(t)$:

$$e(t - t_0) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow s(t - t_0)$$

2.2 Modélisation

Dans le cadre des systèmes de commande, un **modèle** est une représentation mathématique du comportement du système permettant de prévoir l'évolution des grandeurs au cours du temps pour une entrée donnée.

Remarque. Les systèmes automatisés réels ne sont en général ni continus, ni invariants, ni linéaires. On se ramène au cas des SLCI en formulant des hypothèses simplificatrices. La comparaison entre le modèle et la réalité permettra ensuite de valider (ou non) ces hypothèses.

Pour modéliser un SLCI, il est nécessaire d'établir une équation différentielle reliant l'entrée $e(t)$ (ou les entrées) et la sortie $s(t)$.

Propriété. Sous les hypothèses de continuité, de linéarité et d'invariance dans le temps, la relation de comportement d'un système peut se mettre sous la forme d'une **équation différentielle linéaire à coefficients constants**.

Sous sa forme générale, cette équation s'écrit :

$$e(t) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow s(t)$$

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt}(t) + \dots + b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t)$$

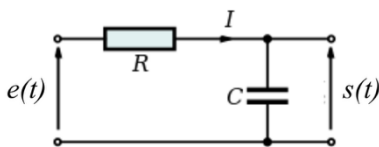
Définition — Ordre du système. L'ordre du système est défini par le plus grand rang de dérivation appliqué à la sortie, c'est-à-dire n dans l'équation (2.1).

Remarque — Causalité. Pour qu'un système soit physiquement réalisable, il faut que l'ordre de dérivation appliqué à la sortie soit au moins aussi grand que celui appliqué à l'entrée, c'est-à-dire $m \leq n$.

Autrement dit, la réponse du système à un instant t ne peut dépendre que des valeurs présentes ou passées de l'entrée (jamais de valeurs futures). Explications détaillées et exemples sont donnés en annexe de la séquence 3.

Exemple — Pacemaker. Un stimulateur cardiaque peut être modélisé par un circuit RC série (résistance R + condensateur C) : la charge du condensateur se fait à travers la résistance R , avant d'être déchargé à travers le muscle cardiaque (non représenté ci-dessous). On souhaite modéliser la charge du condensateur.

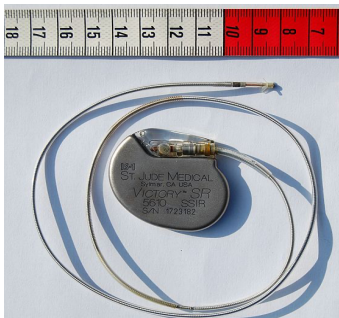
Hypothèses : l'entrée est la tension $e(t)$, la sortie est la tension aux bornes du condensateur $s(t)$. **Question :** déterminer l'équation différentielle régissant le comportement de ce système et donner son ordre.



Équations électriques :

$$e(t) = s(t) + R i(t)$$

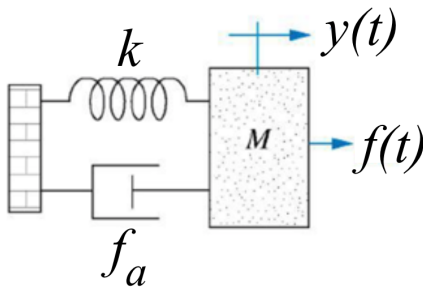
$$i(t) = \frac{dq}{dt}(t), \quad q(t) = C s(t)$$



Exemple. On s'intéresse au mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et d'un ressort. Ce système peut être modélisé par une masse M reliée en série à un ressort de raideur k et à un amortisseur de coefficient f_a montés en parallèle.

Hypothèses : l'entrée est la force extérieure $f(t)$ appliquée à la roue. La sortie est la position $y(t)$ de la roue.

Question : déterminer l'équation différentielle régissant le comportement de ce système et donner son ordre.



2.3 Un outil : la transformée de Laplace

Après avoir modélisé un système sous la forme de l'équation différentielle (2.1), on peut étudier son comportement en résolvant cette équation afin de déterminer la sortie $s(t)$ en fonction d'une entrée $e(t)$.

Mathématiquement, la solution générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants peut s'écrire :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t),$$

où :

$s_1(t)$ est la **solution générale de l'équation homogène** (sans second membre), qui correspond à la réponse transitoire ;

$s_2(t)$ est une **solution particulière de l'équation complète**, qui correspond à la réponse en régime permanent.

Cette approche est théorique mais souvent fastidieuse, car elle demande de résoudre explicitement l'équation différentielle. Dans la suite, nous allons utiliser un **outil puissant et systématique** : la *transformée de Laplace*, qui permet de ramener les équations différentielles à de simples équations algébriques.

2.3.1 Définition

Définition — Transformée de Laplace. La transformée de Laplace est une application mathématique permettant de représenter une fonction temporelle dans un domaine virtuel, le **domaine de Laplace**, où les manipulations algébriques sont grandement simplifiées.

Soit $f: t \mapsto f(t)$ une fonction temporelle représentant un signal ou une grandeur physique évoluant au cours du temps. On note $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$, où p est la variable de Laplace (parfois notée s) :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

avec p une variable complexe de dimension $[s^{-1}]$.

Remarque. Cette définition **n'est pas à connaître par cœur** : en CPGE, seule l'utilisation pratique des transformées de Laplace est exigible.

Remarque. La variable p est une variable symbolique : elle ne prend jamais de valeur numérique dans nos applications.

Notation. Transformée de Laplace : $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
Transformée de Laplace inverse $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$.

On se placera dans le domaine de Laplace pour résoudre des équations différentielles linéaires de manière efficace :

Exemple — Transformée de Laplace d'un échelon. On considère un échelon causal d'amplitude e_0 :

$$e(t) = e_0 u(t).$$

Appliquer la définition de la transformée de Laplace pour déterminer $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$.

Correction.

Ce calcul, donné à titre d'exemple, n'est pas exigible aux concours.

Propriété — Transformées de Laplace de signaux usuels. (à connaître par cœur !)

	$x(t)$	$X(p)$
	Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
	Échelon d'amplitude A : $A u(t)$	$\frac{A}{p}$
	Rampe de pente b : $b t u(t)$	$\frac{b}{p^2}$
	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

Définition — Conditions de Heaviside. Une fonction temporelle $e(t)$ vérifie les conditions de Heaviside si :

$$e(0^-) = 0, \quad \dot{e}(0^-) = 0, \quad \ddot{e}(0^-) = 0, \dots$$

c'est-à-dire si les conditions initiales sont nulles et que le système est au repos pour $t < 0$.

2.3.2 Propriétés de la transformée de Laplace [TL]

La transformée de Laplace prend tout son intérêt lorsqu'il s'agit de manipuler des équations différentielles grâce aux propriétés suivantes :

Propriété — Dérivation de la TL. Sous les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles), on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= F(p) \\ \mathcal{L}[f'(t)] &= p F(p) \\ \mathcal{L}[f''(t)] &= p^2 F(p) \\ \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= p^n F(p)\end{aligned}$$

En résumé : dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par **p** dans le domaine de Laplace.

Propriété — Intégration de la TL. Soit $g(t) = \int_0^t f(x) dx$, alors :

$$G(p) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{F(p)}{p}.$$

Propriété — Linéarité de la TL. Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a F(p) + b G(p).$$

Attention !

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] \neq \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)].$$

Les trois théorèmes suivants sont au programme, seul le théorème de la valeur finale sera couramment utilisé cette année.

Propriété - Théorème du retard. Soit $g(t) = f(t - \tau)$ la fonction retardée de $f(t)$ d'un temps $\tau > 0$. Alors :

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p).$$

Propriété - Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale. Pour une fonction $s(t)$ et sa transformée $S(p)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pS(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p)$$

Attention ! Il est nécessaire de vérifier la **stabilité du système** avant d'appliquer le théorème de la valeur finale : sinon la limite peut être infinie et conduire à un résultat aberrant.

2.3.3 Fonction de transfert

Soit le modèle traduisant la relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ d'un SLCI sous la forme d'une équation différentielle :

$$e(t) \rightarrow \boxed{\text{Système}} \rightarrow s(t)$$

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt}(t) + \dots + b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t).$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres et en supposant les conditions initiales nulles :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p).$$

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) E(p).$$

D'où :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Définition - Fonction de transfert. On appelle fonction de transfert la fraction rationnelle définie par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}.$$

Propriété. La fonction de transfert est indépendante de l'entrée appliquée. Elle ne dépend que de la variable symbolique p et des paramètres du modèle.

La fonction de transfert d'un système est le modèle de ce système dans le domaine de Laplace. Si $H(p)$ est une fonction de transfert, alors :

$$S(p) = H(p) E(p).$$

Ce qui peut s'exprimer sous la forme d'un schéma-blocs :

$$E(p) \rightarrow \boxed{H(p)} \rightarrow S(p).$$

Définition - Forme canonique d'une fonction de transfert. La forme canonique consiste à imposer une constante unitaire aux polynômes pour écrire la fonction de transfert sous la forme de référence suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots + \dots p^m}{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots + \dots p^{n-\alpha}}$$

K : gain du modèle
 α : classe du système
 n : ordre du système

n , l'ordre du système est la plus haute puissance de p présente au dénominateur. Il correspond également au degré maximal de dérivation dans l'équation différentielle associée.

α , la classe du système est la plus faible puissance de p présente au dénominateur.

Remarque. Si $\alpha = 0$, on parle de *gain statique* pour K . De même, on définit K comme le *gain en vitesse* si $\alpha = 1$, et comme le *gain en accélération* si $\alpha = 2$.

Exemple. Déterminer la forme canonique de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2 + 3p + 5p^2}{3p^2 + 4p^3 + 7p^5}$$

Exemple — Circuit RC, suite. On avait obtenu l'équation différentielle :

$$RC \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t).$$

2.4 Exemple de validation d'une performance d'un système : précision

Un chapitre entier de la séquence 6 est intégralement consacré à la validation des performances des systèmes grâce à leurs fonctions de transfert. On se contentera ici d'un exemple simple de test de précision d'un système.

On rappelle que :

- la notion d'erreur n'a de sens que si l'on compare des grandeurs de consigne et de sortie qui sont de même nature ;
- la précision est caractérisée par l'erreur en régime permanent, appelée aussi *erreur statique* :

$$e_r(+\infty) = \Delta e(+\infty) - \Delta s(+\infty).$$

Définition - Erreur statique. Dans le domaine de Laplace, lorsque les conditions de Heaviside sont vérifiées (conditions initiales nulles), l'erreur statique peut se calculer directement par :

$$e_r(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty).$$

Pour calculer la limite de la sortie $s(t)$ d'un système stable à partir de son image $S(p)$ dans le domaine de Laplace, on utilise le théorème de la valeur finale.

Propriété - Théorème de la valeur finale. Il permet de déterminer la valeur atteinte par une fonction $f(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p).$$

Il est nécessaire de vérifier que le système est stable avant d'appliquer le théorème de la valeur finale.

L'entrée choisie est généralement une entrée en échelon. Dans ce cas, il faut calculer la sortie dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = H(p) E(p) = H(p) \frac{e_0}{p},$$

puis appliquer le théorème de la valeur finale.

Si la sortie converge vers la même valeur e_0 que celle imposée en entrée, alors le système est **précis** pour une entrée en échelon.

Dans le cas contraire, le système n'est pas précis et l'on chiffre l'erreur statique :

$$e_r = \lim_{t \rightarrow +\infty} [e(t) - s(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} p [E(p) - S(p)].$$

Exemple - Déterminer l'erreur en régime permanent du système modélisé par

$$H(p) = \frac{k}{1 + ap + bp^2 + cp^3}$$

soumis à une entrée en échelon d'amplitude E_0 . On suppose que le système est stable.

3 Modéliser la structure d'un système asservi par schéma-blocs

3.1 De la structure chaîne de puissance/chaîne d'information au schéma-blocs

3.1.1 Lien entre la chaîne de puissance et d'information et le schéma-blocs

Le schéma-blocs d'un système traduit les relations d'entrée/sortie dans le domaine de Laplace. Il est construit en s'inspirant de la structure matérielle (chaîne d'énergie et d'information), mais en ne conservant que :

- les composants intervenant directement dans l'asservissement ;
- les grandeurs choisies pour être contrôlées (flux ou effort) dans la chaîne d'énergie.

On supposera les conditions de Heaviside vérifiées (conditions initiales nulles).

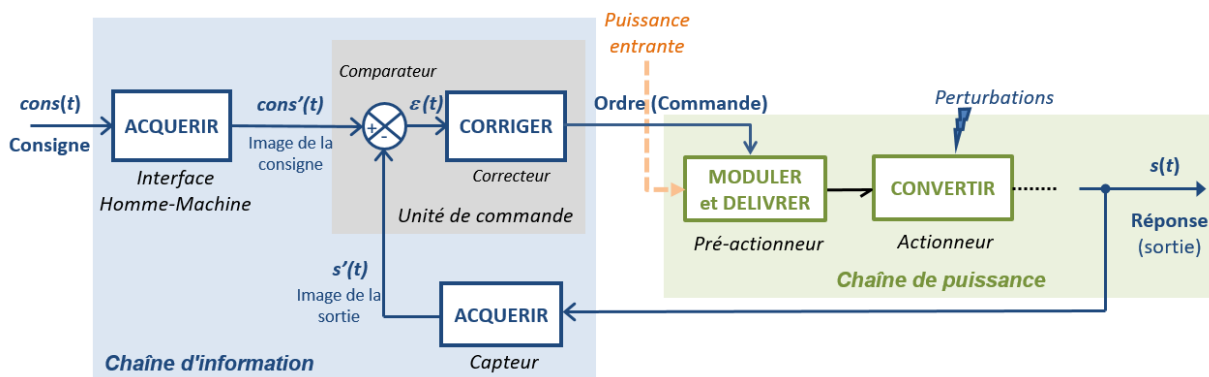


Figure 3-1 - Schéma-blocs classique d'un système

CONSTITUANT	FONCTION
Interface H/M	Traduit la consigne en un signal utilisable par l'unité de commande.
Capteur	Mesure et traduit la sortie en un signal utilisable par l'unité de commande.
Comparateur	Compare l'image de la sortie et l'image de la consigne. Il délivre un signal $\varepsilon(t)$, en général électrique, qui est une image de l'erreur $e_r(t)$. Avec des conditions initiales nulles : $\varepsilon(t) = cons'(t) - s'(t)$ $e_r(t) = cons(t) - s(t)$
Correcteur	Corrige l'image de l'erreur afin de délivrer un signal de commande (ordre) pour améliorer les performances du système (<i>stabilité – rapidité – précision</i>).

Attention ! Les comparateurs additionnent ou retranchent uniquement des grandeurs de même dimension

Sur la figure 3.1, on remarque que l'entrée du pré-actionneur qui nous intéresse pour l'étude de l'asservissement de la grandeur de sortie est l'ordre issu de l'unité de commande, et non pas la puissance entrante (en pointillé sur le schéma) telle qu'elle apparaît dans la représentation chaîne de puissance / chaîne d'information.

Attention ! Il ne faut pas confondre l'ordre envoyé au pré-actionneur avec la puissance qu'il reçoit : l'ordre (souvent une tension de commande, exprimée en volts) n'est qu'un signal de faible énergie. Ce n'est pas lui qui fournit la puissance nécessaire à la chaîne de puissance pour faire évoluer la grandeur de sortie.

3.1.2 Structure du schéma-blocs d'un système asservi

Dans le but de pouvoir déterminer plus facilement la fonction de transfert globale du système, le schéma-blocs, en plus de s'appuyer sur la structure chaîne de puissance/chaîne d'information, met en évidence le modèle (dans le domaine de Laplace) de chacun des constituants intervenant dans l'asservissement.

Dans le cas général, la représentation d'un asservissement par schéma-blocs est la suivante (figure 3.2) :

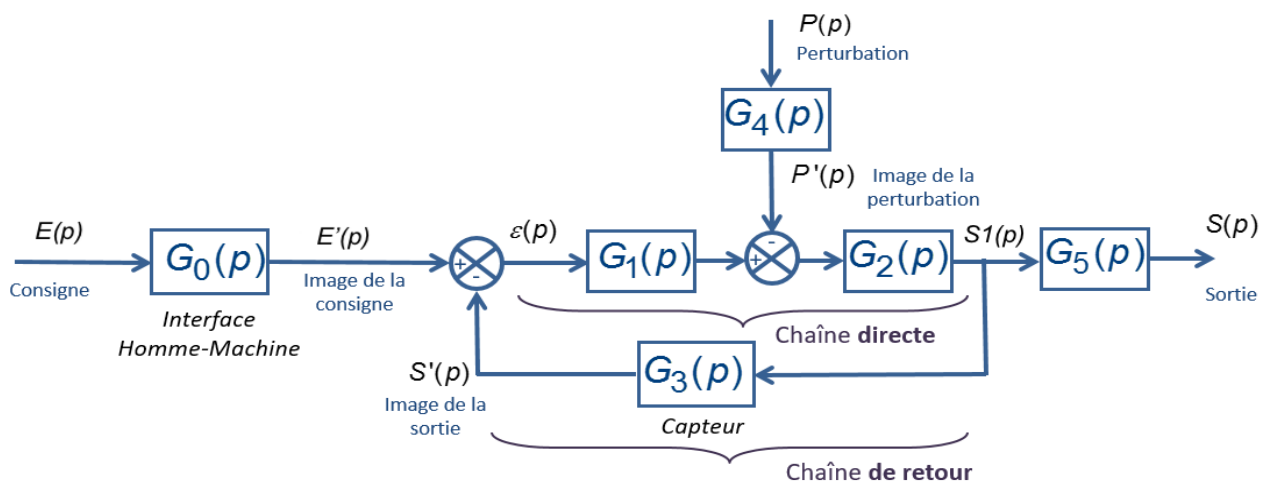


Figure 3-2 - Représentation générale d'un système asservi par schéma-blocs

Les trois éléments de base du schéma-blocs sont :

Le bloc — représente un constituant du système asservi (interface H/M, capteur, actionneur, ...). Il modélise une <i>relation entrée/sortie unique</i> (une entrée, une sortie) par une équation dans le domaine de Laplace.	
Le point de prélèvement — prélève le signal <i>sans le modifier</i> en un point du schéma-blocs pour l'emmener ailleurs (mesure, retour, etc.).	
Le comparateur — sommateur/soustracteur à <i>plusieurs entrées</i> et <i>une seule sortie</i>. Les entrées sont additionnées ou retranchées (attention : <i>même dimension</i> pour être combinées).	

Un système asservi est constitué de deux chaînes (Figure 3.2) :

Définition. La **chaîne directe**, comprise entre le premier comparateur et le point de prélèvement du capteur, assure les fonctions de *commande*.

Définition. La **chaîne de retour**, comprise entre le point de prélèvement du capteur et le premier comparateur, assure la fonction de *mesure* du signal de sortie.

Dans le modèle d'un système asservi, la perturbation est généralement représentée par une entrée qui vient modifier la chaîne directe au travers d'un comparateur.

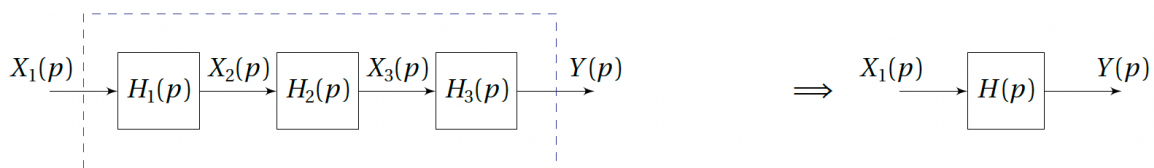
La mesure de la sortie (point de prélèvement situé entre $G_2(p)$ et $G_5(p)$, Figure 3.2) est souvent réalisée via une grandeur intermédiaire, et non pas directement sur $S(p)$.

3.2 Du schéma-blocs à la fonction de transfert

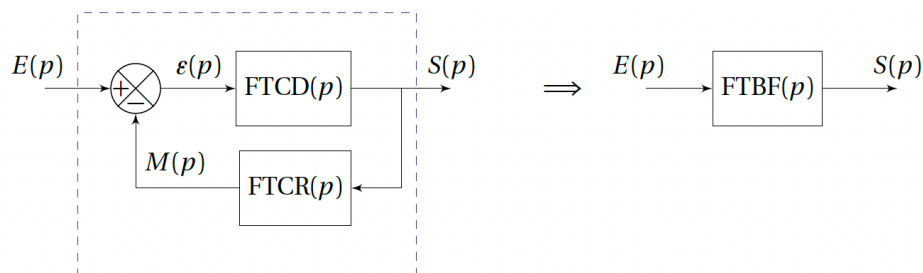
Pour étudier ou prévoir le comportement d'un SLCI asservi, il est nécessaire de connaître sa fonction de transfert globale. Celle-ci est obtenue à partir des différentes fonctions de transfert de chacun de ses constituants. Il est donc indispensable de connaître les règles d'association et de simplification des schéma-blocs.

3.2.1 Association de blocs

3.2.1.1 Association de blocs en série



3.2.1.2 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système bouclé

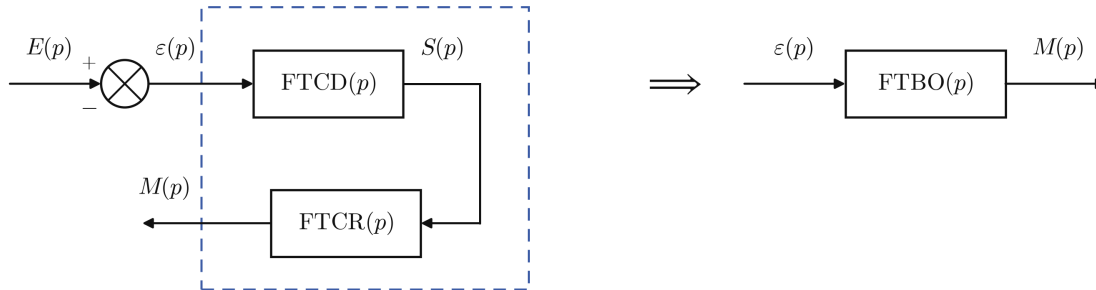


Propriété - Formule de Black. La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTCD}(p) \text{FTCT}(p)}$$

3.2.1.3 Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) d'un système bouclé

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système lorsque le retour sur le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne d'action et la chaîne de mesure.



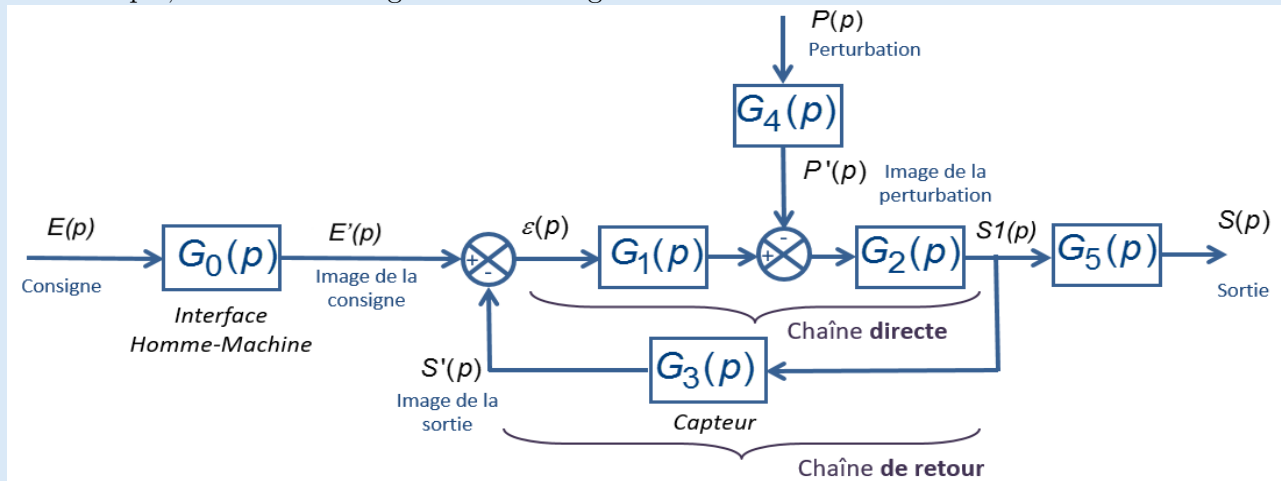
Remarque. On retrouve la relation entre FTBO et FTBF donnée par la formule de Black :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{\text{FTCD}(p)}{1 + \text{FTBO}(p)}$$

Méthode — FTBO, FTBF, fonction de transfert globale .

Les termes **FTBO**, **FTBF**, **chaîne directe** et **chaîne de retour** ne sont employés que dans le cas d'un schéma-blocs comprenant **une seule boucle de rétroaction simple** (sans blocs supplémentaires avant ou après).

Par exemple, dans le schéma général de la Figure 3.2 :



Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) :

$$\text{FTBF}(p) = \frac{S_1(p)}{E'(p)}$$

Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) :

$$\text{FTBO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)}$$

Fonction de Transfert de la Chaîne Directe (FTCD) :

$$\text{FTCD}(p) = \frac{S_1(p)}{\varepsilon(p)}$$

Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour (FTCR) :

$$\text{FTCR}(p) = \frac{S'(p)}{S_1(p)}$$

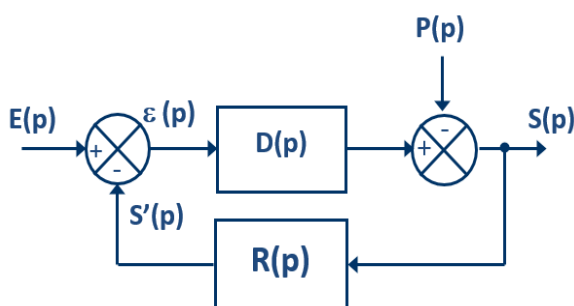
Enfin, on peut également définir la fonction de transfert **globale** du système :

$$\text{FT}_{\text{globale}}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

3.2.1.4 Système à plusieurs entrées : théorème de superposition

Propriété. La sortie d'un système à plusieurs entrées est obtenue en additionnant toutes les réponses élémentaires. Une réponse élémentaire est obtenue en n'ayant qu'une seule entrée non nulle. C'est une conséquence directe de la linéarité du modèle.

Exemple — Application du théorème de superposition.



On pose :

$$H_1(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{P=0},$$

$$S(p) = H_1(p) E(p) \quad (\text{si } P = 0).$$

$$H_2(p) = \left. \frac{S(p)}{P(p)} \right|_{E=0},$$

$$S(p) = H_2(p) P(p) \quad (\text{si } E = 0).$$

Par superposition :

$$S(p) = H_1(p) E(p) + H_2(p) P(p).$$

Calcul analytique :

3.2.2 Déplacement des points de jonction et des sommateurs

Les schémas-blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier. La Figure 3.3, montre quelques schémas équivalents. L'inconvénient à modifier la structure du schéma est de perdre le lien entre les entrées/sorties et les grandeurs physiques du système étudié.

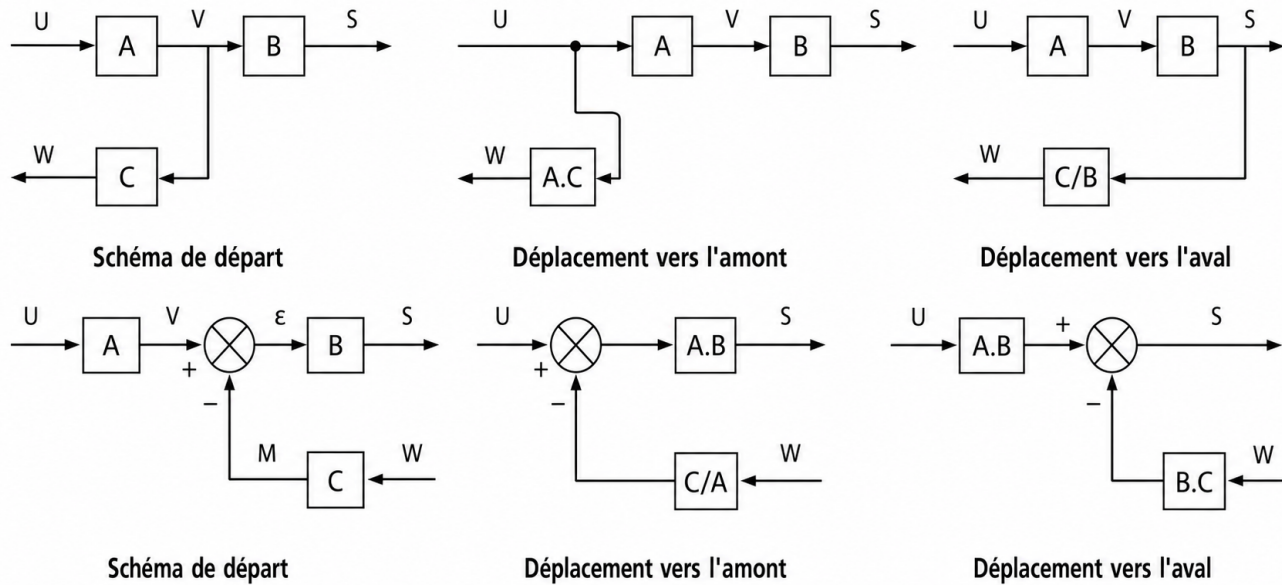


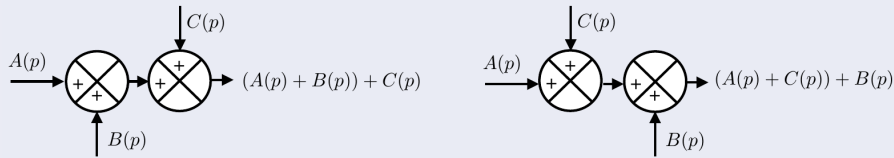
Figure 3-3 Exemples d'opérations sur les schémas-blocs

Exemple. On vérifie par exemple le déplacement vers l'amont d'un point de prélèvement :

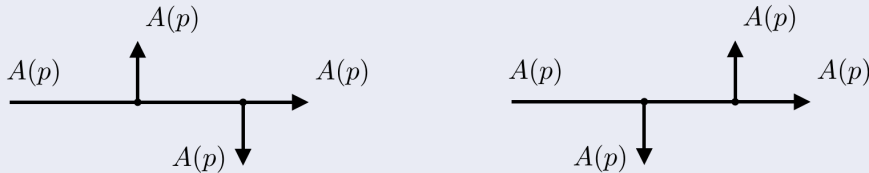
Méthode — Manipulation des sommateurs et points de prélèvement.

Deux **sommateurs en série** peuvent toujours être intervertis, car l'addition est associative :

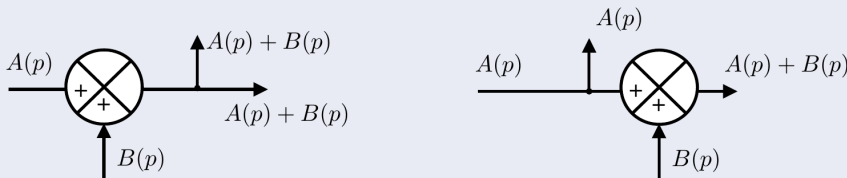
$$(A + B) + C = (A + C) + B$$



Deux **points de prélèvement en série** peuvent également être intervertis, car ils prélèvent exactement la même grandeur (le signal n'est pas modifié).



En revanche, il est **impossible d'intervertir un sommateur et un point de prélèvement voisins**, car cela modifie la nature du signal envoyé en sortie.



Dans le second cas, le signal prélevé n'est plus $A + B$ mais seulement A , ce qui modifie le système.