Semaine de colles n°1 du 21/09/26 au 25/09/26

- **Ensembles, logique et raisonnement**

**I à III – Éléments de logique**
- Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

**IV – Ensembles**
- Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

**V – Les quantificateurs**

**VI – Divers types de raisonnement**

Récurrence simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.
Ex. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. ***(*)***

- **Ordre sur $\mathbb{R}$ et inégalités**

**I – Les ensembles de nombres**

**II – Opérations dans $\mathbb{R}$**
- Propriétés de l'addition et de la multiplication de réels.

**III – Comparaison dans $\mathbb{R}$**
- Propriétés de la comparaison dans $\mathbb{R}$, ordre total.
- Règles pour transformer une inégalité.

⚠
- Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par une quantité, ON ÉTUDIE D'ABORD SON SIGNE.
- On ajoute des inégalités de même sens mais ON NE LES SOUSTRAIT JAMAIS.
- On multiplie des inégalités de même sens QUE SI ELLES PORTENT SUR DES RÉELS POSITIFS.

- Méthode pour démontrer une inégalité : utilisation du sens de variations d'une fonction, se ramener à une étude de signe, réaliser un tableau de signes, réaliser une étude de fonction, etc…
- Vocabulaire lié à l'ordre : Majorant/minorant, plus grand/petit élément, borne sup. /borne inf.
- Toute partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (inférieure).

**IV – Intervalles de $\mathbb{R}$**
- Définition, classification.

**V – Valeur absolue**
- Définition, propriétés de calcul, interprétation en termes de distance.
- Lien avec les intervalles : $|x-a|=r \Leftrightarrow -r=x-a=r \Leftrightarrow x=a-r$ ou $x=a+r$

$|x-a|\le r \Leftrightarrow -r\le x-a\le r \Leftrightarrow a-r\le x\le a+r \Leftrightarrow x\in[a-r,a+r]$.

$|x-a|\ge r \Leftrightarrow x-a\le -r$ ou $x-a\ge r \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,a-r]\cup[a+r,+\infty[$

Savoir interpréter en termes de distances, faire un schéma.
- Inégalité triangulaire avec cas d'égalité ***(*) L'interrogateur est libre de demander toute la démonstration ou seulement une partie ; mais il faut savoir citer le théorème complet.***

Et généralisation : Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on a : $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

**VI – Partie entière et approximations décimales d'un réel**
- Définition, notation $\lfloor x\rfloor$, représentation graphique, propriétés.
- $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall p\in\mathbb{Z},\ \lfloor x+p\rfloor=\lfloor x\rfloor+p$
- Approximations décimales à $10^{-n}$ près d'un réel.

**NOUVEAU COURS :**

- **Trigonométrie : rappels et compléments**

**I à IV – Rappels et compléments**
- Enroulement de la droite des réels, premières propriétés, valeurs usuelles
- Angles associés : lecture du cercle trigo. pour simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)$, $\cos(x\pm\pi)$ , $\sin(x\pm\pi)$, etc.
- Résolution de $\cos x=\cos y$, $\sin x=\sin y$, $\cos x=0$ et $\sin x=0$.
- Formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

**V – Fonctions circulaires**
- Rappels : fonctions cosinus et sinus
- Inégalités à connaitre : $\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin x|\le|x|$ et $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$ ***(*)***
- Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, expression des dérivées n-ième.
- Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.

Une question de cours pourra donner tous les résultats relatifs à la fonction tangente : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique. ***(*)***
- Résolution de $\tan x=\tan y$
- Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

- **Généralités sur les fonctions réelles**

**I – Généralités sur les fonctions réelles**
- Définition, image d'une fonction.
- Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

**II – Propriétés globales**
- Périodicité, parité
- Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

**III – Régularité**
- Continuité
- Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.

***(*)*** Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 2 : Généralités sur les fonctions usuelles (fin)

Déroulement d'une colle

1. Écrire sous forme symbolique une définition des chapitres au programme et/ou sa négation
2. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par ***(*)***
3. Un ou deux exercices identiques ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous),
4. Éventuellement, s'il reste du temps, un exercice plus compliqué

Une question de cours (points 1 à 3) non connue entraine une note < 10.
Si les points 1 à 3 sont réussis, la note sera ≥ 13.

# Semaine de colles n°1 du 21/09/26 au 25/09/26 - Exercices à savoir refaire

## Exercices Chap. 1

**Exercice 1 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **b.** $0 < \dfrac{2-x}{1-x} < 1$

**Exercice 3 :**
Démontrer les inégalités suivantes :

**a.** $\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \le x$ **b.** $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x+1 \le e^x$ **c.** $\forall\, x \in [\,0, \dfrac{\pi}{2}\,],\ \dfrac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$

Rq. 2 méthodes vues en TD : utilisation de la convexité et par étude de fonction.
Rq. Ces inégalités sont à connaitre.

**Exercice 4 :** *Inégalités entre les moyennes.*

Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Montrer que : $\dfrac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$.

**Exercice 10 :**

**1. a.** Montrer que : $\forall\, x \in [0, 1],\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ 0 \le x^k(1-x)^k \le x^k$

**b.** En déduire que : $\forall\, x \in\, ]0, 1[,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \le \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \le \dfrac{1}{1-x}$

**Exercice 13 :**

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

**1.** On considère A + B = { $a + b$, $a \in$ A, $b \in$ B}. Montrer que A + B est majorée et que l'on a : sup(A + B) = sup A + sup B.

**Exercice 15 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **e.** $\left|\dfrac{3-x}{5}\right| < 10$ **g.** $|2x-4| \le |x-1|$

**Exercice 19 :**

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left\lfloor \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

**Exercice 23 :**

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

## Exercices Chap. 2

**Exercice 1 :**

**2.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $\cos(x + n\pi) = \ldots$.

**Exercice 3 :**

Soit $x$ un réel. Déterminer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

**Exercice 4 :**

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **a.** $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**2.** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Même question dans $[0, 2\pi]$.

**Exercice 5 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1.** $\sin(2x) = \sin x$ **3.** $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x$ **4.** $\cos(2x) + \sin(3x) = 0$

**Exercice 6 :** *Avec la fonction tangente.*
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

**1.** $\tan\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$ **2.** $\tan x \ge 1$ **3.** $\tan x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **4.** $\tan\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge 1$

## Exercices Chap. 3

**Exercice 1 :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs : **1.** $f$ est paire. **2.** $f$ est majorée. **3.** $f$ admet un maximum. **4.** $f$ est bornée. **5.** $f$ n'est pas paire. **6.** $f$ n'est pas majorée. **7.** $f$ n'est pas bornée.

**Exercice 4 :**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
**1.** Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
**2.** Étudier la parité de la fonction $f$.
**3.** Sans calcul de dérivée, donner les variations de $f$ sur son ensemble de définition.

**Exercice 6 :**

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. *Ind. On pourra étudier la périodicité de $f : x \longrightarrow \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$*