

Semaine de colles n°1 du 21/09/26 au 25/09/26

• Ensembles, logique et raisonnementI à III - Éléments de logique

- ➡ Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- ➡ Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

IV - Ensembles

- ➡ Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

V - Les quantificateursVI - Divers types de raisonnement

Récurrence simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.

Ex. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. (*)

• Ordre sur $\mathbb{R}$ et inégalitésI - Les ensembles de nombresII - Opérations dans $\mathbb{R}$

- ➡ Propriétés de l'addition et de la multiplication de réels.

III - Comparaison dans $\mathbb{R}$

- ➡ Propriétés de la comparaison dans $\mathbb{R}$, ordre total.
- ➡ Règles pour transformer une inégalité.
 - ⚠ • Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par une quantité, ON ÉTUDIE D'ABORD SON SIGNE.
 - On ajoute des inégalités de même sens mais ON NE LES SOUSTRAIT JAMAIS.
 - On multiplie des inégalités de même sens QUE SI ELLES PORTENT SUR DES RÉELS POSITIFS.
- ➡ Méthode pour démontrer une inégalité : utilisation du sens de variations d'une fonction, se ramener à une étude de signe, réaliser un tableau de signes, réaliser une étude de fonction, etc...
- ➡ Vocabulaire lié à l'ordre : Majorant/minorant, plus grand/petit élément, borne sup. /borne inf.
- ➡ Toute partie non vide et majorée (minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (inférieure).

IV - Intervalles de $\mathbb{R}$

- ➡ Définition, classification.

V - Valeur absolue

- ➡ Définition, propriétés de calcul, interprétation en termes de distance.
 - ➡ Lien avec les intervalles : $|x - a| = r \Leftrightarrow -r = x - a = r \Leftrightarrow x = a - r \text{ ou } x = a + r$
 - $|x - a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$.
 - $|x - a| \geq r \Leftrightarrow x - a \leq -r \text{ ou } x - a \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty[$

Savoir interpréter en termes de distances, faire un schéma.

- ➡ Inégalité triangulaire avec cas d'égalité (*) L'interrogateur est libre de demander toute la démonstration ou seulement une partie ; mais il faut savoir citer le théorème complet.

Et généralisation : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

VI - Partie entière et approximations décimales d'un réel

- ➡ Définition, notation $\lfloor x \rfloor$, représentation graphique, propriétés.
- ➡ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$
- ➡ Approximations décimales à 10^{-n} près d'un réel.

NOUVEAU COURS :• Trigonométrie : rappels et complémentsI à IV - Rappels et compléments

- ➡ Enroulement de la droite des réels, premières propriétés, valeurs usuelles
- ➡ Angles associés : lecture du cercle trigo. pour simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$, $\cos(x \pm \pi)$, $\sin(x \pm \pi)$, etc.
- ➡ Résolution de $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$, $\cos x = 0$ et $\sin x = 0$.
- ➡ Formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

V - Fonctions circulaires

- ➡ Rappels : fonctions cosinus et sinus
 - ➡ Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ (*)
 - ➡ Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, expression des dérivées n-ième.
 - ➡ Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.
- Une question de cours pourra donner tous les résultats relatifs à la fonction tangente : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique. (*)
- ➡ Résolution de $\tan x = \tan y$
 - ➡ Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

• Généralités sur les fonctions réellesI - Généralités sur les fonctions réelles

- ➡ Définition, image d'une fonction.
- ➡ Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- ➡ Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II - Propriétés globales

- ➡ Périodicité, parité
- ➡ Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III - Régularité

- ➡ Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, prolongement par continuité en un point.
 - ➡ Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.
- Cette semaine une question de cours pourra être d'étudier la continuité/dérivabilité d'une fonction composée (avec calcul de la dérivée). Rédaction parfaite exigée !

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 2 : Généralités sur les fonctions usuelles (fin)

Déroulement d'une colle

1. Écrire sous forme symbolique une définition des chapitres au programme et/ou sa négation
2. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*)
3. Un ou deux exercices identiques ou très proche d'un exercice « à savoir refaire »
(cf. liste ci-dessous),
4. Éventuellement, s'il reste du temps, un exercice plus compliqué

Une question de cours (points 1 à 3) non connue entraine une note < 10.
Si les points 1 à 3 sont réussis, la note sera ≥ 13 .

Semaine de colles n°1 du 21/09/26 au 25/09/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 1Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **b.** $0 < \frac{2-x}{1-x} < 1$

Exercice 3 :

Démontrer les inégalités suivantes :

a. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$

c. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

Rq. 2 méthodes vues en TD : utilisation de la convexité et par étude de fonction.

Rq. Ces inégalités sont à connaître.

Exercice 4 : Inégalités entre les moyennes.

Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que : $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Exercice 10 :

1. a. Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq x^k(1-x)^k \leq x^k$

b. En déduire que : $\forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{k=0}^n x^k(1-x)^k \leq \frac{1}{1-x}$

Exercice 13 :

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1. On considère $A+B = \{a+b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A+B$ est majorée et que l'on a : $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 15 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : **e.** $\left| \frac{3-x}{5} \right| < 10$ **g.** $|2x-4| \leq |x-1|$

Exercice 19 :

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

Exercice 23 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor x \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 2x \right\rfloor$

Exercices Chap. 2Exercice 1 :

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $\cos(x+n\pi) = \dots$

Exercice 3 :

Soit x un réel. Déterminer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 4 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **a.** $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Même question dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \sin x$

3. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$

4. $\cos(2x) + \sin(3x) = 0$

Exercice 6 : Avec la fonction tangente.

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

2. $\tan x \geq 1$

3. $\tan x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$

Exercices Chap. 3Exercice 1 :

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs : **1.** f est paire.

2. f est majorée.

3. f admet un maximum.

4. f est bornée.

5. f n'est pas paire.

6. f n'est pas majorée.

7. f n'est pas bornée.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier la parité de la fonction f .

3. Sans calcul de dérivée, donner les variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 6 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x \right\rfloor$. *Ind. On pourra étudier la périodicité de $f: x \longmapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor x \right\rfloor$*