

Semaine de colles n°2 du 28/09/26 au 02/10/26

• **Ensembles, logique et raisonnement****I à III - Éléments de logique**

- Connecteurs logiques : disjonction ou conjonction de deux assertions, négation d'une assertion
- Implication, implication réciproque et contraposée, équivalence.

IV - Ensembles

- Parties, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, différence de deux ensembles, produit cartésien.

V - Les quantificateurs**VI - Divers types de raisonnement**

Récurrence simple, démontrer une implication (raisonnement direct ou contraposée), démontrer une équivalence (raisonnement direct ou double implication), raisonnement par l'absurde, raisonnement par analyse/synthèse. Ce dernier type de raisonnement a pour l'instant été très peu utilisé.

Ex. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. (*)

• **Trigonométrie : rappels et compléments****I à IV - Rappels et compléments**

- Enroulement de la droite des réels, premières propriétés, valeurs usuelles
- Angles associés : lecture du cercle trigo. pour simplifier $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right)$, $\cos(x \pm \pi)$, $\sin(x \pm \pi)$, etc.
- Résolution de $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$, $\cos x = 0$ et $\sin x = 0$.
- Formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

V - Fonctions circulaires

- Rappels : fonctions cosinus et sinus
 - Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ (*)
 - Les fonctions cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, expression des dérivées n-ième. (*)
 - Fonction tangente : Étude complète avec ensemble de définition, dérivée, variations, limites, courbe représentative.
- Une question de cours pourra donner tous les résultats relatifs à la fonction tangente : définition, propriétés, dérivabilité et dérivée, variations et représentation graphique. (*)
- Résolution de $\tan x = \tan y$
 - Formules d'addition, de linéarisation et de duplication.

• **Généralités sur les fonctions réelles****I - Généralités sur les fonctions réelles**

- Définition, image d'une fonction.
- Représentation graphique des fonctions associées et application à la recherche de symétries.
- Opérations sur les fonctions : multiplication par un réel, somme, produit et composition.

II - Propriétés globales

- Périodicité, parité
- Fonctions monotones et strictement monotones, fonctions majorées/minorées/bornées.

III - Régularité

- Continuité
- Dérivabilité, variations et dérivées, dérivée seconde.

NOUVEAU COURS :• **Généralités sur les fonctions réelles****IV - Propriétés de la courbe représentative**

- Tangentes, asymptotes.
- Fonctions convexes, fonctions concaves et caractérisations.

V - Fonction bijective

- Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

VI - Fonctions exponentielle, logarithme népérien

- Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \leq e^x$ et $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$

VII - Fonctions puissances

- Définition de a^b avec a et b réels tel que $a > 0$, propriétés de calcul.
- Étude complète des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ variations et prolongements suivant les valeurs de α
- Fonctions racine n-ième.
- Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
- Croissances comparées.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 3 : Calcul de sommes et de produits

Déroulement d'une colle

1. Écrire sous forme symbolique une définition des chapitres au programme et/ou sa négation
2. Étude la continuité et/ou dérivabilité d'une fonction composée ou de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ (avec calcul de la dérivée), sur un exemple. Rédaction parfaite exigée !
3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*)
4. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous)
5. Éventuellement, s'il reste du temps, un exercice plus compliqué

Un cours non connu (points 1 à 3) entraîne une note < 10 .

Si les points 1 à 4 sont réussis, la note sera ≥ 13 .

Semaine de colles n°2 du 28/09/26 au 02/10/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 2Exercice 1 :

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $\cos(x + n\pi) = \dots$

Exercice 3 :

Soit x un réel. Déterminer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 4 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **a.** $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Même question dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \sin x$

3. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$.

4. $\cos(2x) + \sin(3x) = 0$

Exercice 6 : Avec la fonction tangente.

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

2. $\tan x \geq 1$

3. $\tan x < \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$

Exercices Chap. 3Exercice fait dans le cours :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2}$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
- Déterminer alors la bijection réciproque de f .

Exercice 1 :

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs :

- f est paire.
- f est majorée.
- f admet un maximum.
- f est bornée.
- f n'est pas paire.
- f n'est pas majorée.
- f n'est pas bornée.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Étudier la parité de la fonction f .
- Sans calcul de dérivée, donner les variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 6 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. *Ind. On pourra étudier la périodicité de $f: x \longmapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$*

Exercice 10 :

Trouver toutes les fonctions périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : Tangentes particulières.

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$.

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D_f .

Exercice 18 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f(x) = x^2 + \ln x + 1$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{++}$ sur un ensemble J à déterminer.
- Donner le tableau de variations de f^{-1} .
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1} . *On ne demande pas d'explicitier f^{-1} .*
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercice 20 :

Résoudre :

a. $\ln |x - 1| + \ln |x - 3| = \ln |3x^2 - 4x + 1|$

c. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

e. $3^x + 4^x = 5^x$

Exercice 21 :

4. Montrer que : $\forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$

Exercice 23 :

Étudier les fonctions suivantes :

1. $f: x \longmapsto x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

Exercice 24 :

Étudier les fonctions suivantes : **1.** $f: x \longmapsto x^{1/x}$