

• Généralités sur les fonctions réellesI - Généralités sur les fonctions réellesII - Propriétés globalesIII - Régularité

- ➡ Continuité en un point, sur un intervalle.
- ➡ Dérivabilité en un point et sur un intervalle, variations et dérivées, dérivée seconde.

IV - Propriétés de la courbe représentative

- ➡ Tangentes, asymptotes.
- ➡ Fonctions convexes, fonctions concaves et caractérisations.

V - Fonction bijective

- ➡ Fonction bijective, bijection réciproque et dérivation de la bijection réciproque.

VI - Fonctions exponentielle, logarithme népérien

- ➡ Inégalités à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$ et $\forall x > 0, \ln x \leq x-1$

VII - Fonctions puissances

- ➡ Définition de a^b avec a et b réels tel que $a > 0$, propriétés de calcul.
- ➡ Étude complète des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, variations et prolongements suivant les valeurs de α
- ➡ Fonctions racine n -ième.
- ➡ Méthode d'étude de fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.
- ➡ Croissances comparées.

NOUVEAU COURS :• Calcul de sommes et de produitsI - Le symbole Σ

- ➡ Notation Σ pour les sommes
- ➡ Règles de calcul : termes constants, facteur constant, changement d'indice, symétrie, sommes télescopiques.
- ➡ Séparation des termes pairs et impairs
- ➡ Sommes classiques : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ (*) et $\sum_{k=1}^n k^3$.

- ➡ Sommes de type géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a : $\sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ (*)

- ➡ Formule de Bernoulli : $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

- ➡ Cas des sommes doubles, Sommes triangulaires : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n x_{i,j}$

II - Le symbole Π

- ➡ Notation Π pour les produits
- ➡ Règles de calcul, produits télescopiques.

III - Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie

- ➡ Définition de $n!$, de $\binom{n}{k}$, valeurs particulières, symétrie et Si $1 \leq k \leq n$, on a : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- ➡ Formule du triangle de Pascal (*- Calcul et « illustration ») et formule du binôme de Newton.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 4 : Nombres complexes (début)

Déroulement d'une colle

1. Citer une définition, un théorème ou une propriété : définition fonction convexe, définition fonctions bijective, th de la bijection continue, th de dérivabilité d'une réciproque, etc.
2. Étude la continuité et/ou dérivabilité sur un intervalle d'une fonction composée ou de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ (avec calcul de la dérivée), sur un exemple. Rédaction parfaite exigée !
3. Éventuellement, une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*)
4. Un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous)
5. Éventuellement, s'il reste du temps, un exercice plus compliqué

Un cours non connu (points 1 à 3) entraîne une note < 10 .

Si les points 1 à 4 sont réussis, la note sera ≥ 13 .

Semaine de colles n°3 du 05/10/26 au 09/10/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 3Exercice fait dans le cours :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2}$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
- Déterminer alors la bijection réciproque de f .

Exercice 1 :

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs :

- f est paire.
- f est majorée.
- f admet un maximum.
- f est bornée.
- f n'est pas paire.
- f n'est pas majorée.
- f n'est pas bornée.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Étudier la parité de la fonction f .
- Sans calcul de dérivée, donner les variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 6 :

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. *Ind. On pourra étudier la périodicité de $f: x \longmapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$*

Exercice 10 :

Trouver toutes les fonctions périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : Tangentes particulières.

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^3(2-x)}$.

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis les tangentes à la courbe représentative de f aux bornes de D_f .

Exercice 18 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = x^2 + \ln x + 1$.

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur un ensemble J à déterminer.
- Donner le tableau de variations de f^{-1} .
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1} . *On ne demande pas d'explicitier f^{-1} .*
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Exercice 20 :

Résoudre :

$$\text{a. } \ln|x-1| + \ln|x-3| = \ln|3x^2 - 4x + 1| \quad \text{c. } 2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2} \quad \text{e. } 3^x + 4^x = 5^x$$

Exercice 21 :

$$4. \text{ Montrer que : } \forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

Exercice 23 :

Étudier les fonctions suivantes : **1.** $f: x \longmapsto x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

Exercice 24 :

Étudier les fonctions suivantes : **1.** $f: x \longmapsto x^{1/x}$

Exercices Chap. 4

Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned} 1. S_1 &= \sum_{k=1}^n k(n+1-k) & 2. S_2 &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} & 3. S_3 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ 5. S_5 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) & 7. S_7 &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 \end{aligned}$$

Exercice 5 : Sommes doubles.

Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned} 1. S_1 &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n \frac{i}{k+1} & 2. S_2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij & 3. S_3 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) & 4. S_4 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) \end{aligned}$$

Exercice 6 :

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n ka^k$

- Calculer S_n lorsque $a = 1$.
- Lorsque $a \neq 1$, calculer $a S_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n .
- Lorsque $a \neq 1$, retrouver le résultat précédent en remarquant que $S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a^k$.

Exercice 12 :

Calculer les produits suivants : (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) : **a.** $P_1 = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ **b.** $P_2 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$

Exercice 13 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P(x) = \prod_{k=0}^n \cos(2^k x)$.

- Calculer $P(x)$ dans le cas où $x \equiv 0 \pmod{\pi}$.
- Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et déterminer $P(x)$.

Exercice 14 :

Calculer les sommes suivantes (n appartient à $\mathbb{N}$) : **1.** $S_1' = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $S_1'' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$

Exercice 17 :

1. Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Montrer que : $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$  Formule à connaître

2. Calculer les sommes suivantes : $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$, $S' = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$ et $S'' = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k} \binom{n}{k}$.

Exercice 18 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f: x \longmapsto (x+1)^n$. Développer l'expression de $f(x)$, de $f'(x)$ et de $f''(x)$.

2. En déduire les valeurs de : $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ et $S' = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

3. Calculer : $S'' = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.