

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Calcul de sommes et de produitsI - Le symbole Σ

- ➡ Notation Σ pour les sommes
- ➡ Règles de calcul : termes constants, facteur constant, changement d'indice, symétrie, sommes télescopiques.
- ➡ Séparation des termes pairs et impairs

➡ Sommes classiques : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ (*) et $\sum_{k=1}^n k^3$.

➡ Sommes de type géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a : $\sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ (*)

➡ Formule de Bernoulli : $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$

➡ Cas des sommes doubles, Sommes triangulaires : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n x_{i,j}$

II - Le symbole Π

- ➡ Notation Π pour les produits
- ➡ Règles de calcul, produits télescopiques.

III - Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie

➡ Définition de $n!$, de $\binom{n}{k}$, valeurs particulières, symétrie et Si $1 \leq k \leq n$, on a : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

➡ Formule du triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.

NOUVEAU COURS :• Les nombres complexesI - Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

- ➡ Définition, unicité de la forme algébrique d'un complexe, parties réelles et imaginaires.
- ➡ Addition et multiplication : propriétés.
- ➡ Conjugaison, propriétés de calcul, expressions de $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$, caractérisation des éléments de $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$.
- ➡ Module, propriétés de calcul.
- ➡ Inégalité triangulaire (*) et cas d'égalité, généralisation.

II - Forme trigonométrique

- ➡ Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
 - ➡ Notation $e^{i\theta}$, propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
 - ➡ Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
 - ➡ Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.
 - ➡ Une méthode à connaître : factorisation par l'angle moitié.
- Ex. Module et arguments de $1 + e^{it}$ ou $1 - e^{it}$, à discuter suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ (*)
- ➡ Exponentielle complexe et propriétés. Résolution d'équations de la forme $e^z = a$.

III - Applications à la trigonométrie

- ➡ Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
- ➡ Transformation de $a \cos x + b \sin x$ et résolution d'équations de la forme : $a \cos x + b \sin x = c$.
- ➡ Application à la trigonométrie :

Pour transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$:
Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Pour exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec n entier, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

On a : $\cos(nx) = \text{Re}(e^{inx}) = \text{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ et $\sin(nx) = \text{Im}(e^{inx}) = \dots$ d'après la formule de De Moivre
Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.

➡ Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$. (*)

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 5 : Nombres complexes (fin)

Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie SANS HESITATION ! cf. formulaire ci-dessous
2. Un calcul parmi :
 - Justification d'une formule de trigonométrie (linéarisation ou factorisation)
 - Équation de la forme $e^z = a$ ou $a \cos x + b \sin x = c$

Vous devez être efficaces dans vos calculs.
3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*)
4. Exercice(s) : On commencera par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Semaine de colles n°4 du 12/10/26 au 16/10/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 4Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned} 1. S_1 &= \sum_{k=1}^n k(n+1-k) & 2. S_2 &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} & 3. S_3 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ 5. S_5 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) & 7. S_7 &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 \end{aligned}$$

Exercice 5 : Sommes doubles.Calculer les sommes suivantes (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned} 1. S_1 &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^n \frac{i}{k+1} & 2. S_2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij & 3. S_3 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) & 4. S_4 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) \end{aligned}$$

Exercice 6 :Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n ka^k$

- Calculer S_n lorsque $a = 1$.
- Lorsque $a \neq 1$, calculer $a S_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n .
- Lorsque $a \neq 1$, retrouver le résultat précédent en remarquant que $S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a^k$.

Exercice 12 :Calculer les produits suivants : (suivant les cas n appartient à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$) : **a.** $P_1 = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

b. $P_2 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$

Exercice 13 :Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P(x) = \prod_{k=0}^n \cos(2^k x)$.

- Calculer $P(x)$ dans le cas où $x \equiv 0 \pmod{\pi}$.
- Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et déterminer $P(x)$.

Exercice 14 :Calculer les sommes suivantes (n appartient à $\mathbb{N}$) : **1.** $S_1' = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $S_1'' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$ Exercice 17 :**1.** Soit n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Montrer que : $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$  Formule à connaître**2.** Calculer les sommes suivantes : $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$, $S' = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$ et $S'' = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k} \binom{n}{k}$.Exercice 18 :**1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto (x+1)^n$. Développer l'expression de $f(x)$, de $f'(x)$ et de $f''(x)$.**2.** En déduire les valeurs de : $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ et $S' = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.**3.** Calculer : $S'' = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.Exercices Chap. 5Exercice 7 :

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.

$$\begin{aligned} 1. z_1 &= \frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1+i)^5} & 4. z_4 &= -2ie^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} \\ 5. z_5 &= (1-i)^n + (1+i)^n, n \in \mathbb{N} & 7. z_7 &= e^{ix} + e^{-iy}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Exercice 10 :**2.** Soit u appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Prouver que : $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R}$.Exercice 17 :Calculer les sommes suivantes (n appartient à $\mathbb{N}$) : $S = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$ Exercice 22 : Calcul de sommes.**3.** Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.Exercice 23 : Equations avec des modules.

- Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z+1| = |z| + 1$.
- Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z| = |1-z| = \frac{1}{|z|}$.

Exercice 24 : Equations avec des arguments.**1.** Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $2 \arg(z+i) \equiv \arg(z) + \arg(i) \pmod{\pi}$.Exercice 25 :**2.** Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16 \bar{z}^7$.

TRIGONOMETRIE**I – Valeurs remarquables**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

II – Relations entre cos, sin et tan

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

III – Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

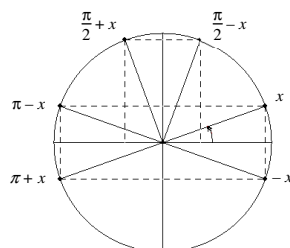
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

Lorsque cela a un sens : $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\tan x}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\tan x}$

IV – Formules usuelles

Formules d'addition. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ Lorsque cela a un sens, on a : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	Formules de linéarisation. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$ $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ $\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
---	---

Formules de duplication. $\forall a \in \mathbb{R},$ $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi\mathbb{Z}}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right) \right), \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	On en déduit : $\forall a \in \mathbb{R},$ $\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a))$ $\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a))$
--	---

Formules de factorisation. $\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $t = \tan \frac{x}{2}$, on a : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ avec $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

Formule de De Moivre.

$$\text{On a : } \forall (\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ c'est-à-dire } \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

V – Équations trigonométriques

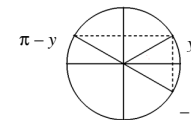
$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi]$$

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi]$$

$$\tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv y [\pi]$$

**Cas particuliers :**

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

VI – Transformation de $a \cos x + b \sin x$

But : Transformer de $a \cos x + b \sin x$ en $A \cos(x - \theta)$ où a et b sont deux réels, non tous les deux nuls.

Méthode :

- On met en facteur $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et on obtient : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$
- Le complexe $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est de module 1 donc $\exists \theta \in \mathbb{R}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$
- On obtient : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)$

Rq. Cette transformation est utile lorsqu'on cherche à résoudre une équation de la forme $a \cos x + b \sin x = c$ avec a, b et c des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

VII – Linéarisation de $\cos^p x$ et $\sin^q x$

But : Transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

Mth. 1

| Utiliser les formules de trigonométrie.

Mth. 2

| Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Rappel : Formules d'Euler.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

VIII – Exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec n entier, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ **Mth.**

Écrire : $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ d'après la formule de De Moivre
 et $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx}) = \operatorname{Im}((\cos x + i \sin x)^n)$ d'après la formule de De Moivre
 Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.