

Semaine de colles n°5 du 2/11/26 au 6/11/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :• Les nombres complexesI - Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

- Définition, unicité de la forme algébrique d'un complexe, parties réelles et imaginaires.
- Addition et multiplication : propriétés.
- Conjugaison, propriétés de calcul, expressions de $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$, caractérisation des éléments de $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$.
- Module, propriétés de calcul.
- Inégalité triangulaire (*) et cas d'égalité, généralisation.

II - Forme trigonométrique

- Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
 - Notation $e^{i\theta}$, propriétés de calcul, formules de De Moivre et d'Euler.
 - Argument d'un complexe de module 1, d'un complexe non nul, propriétés de calcul.
 - Caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide des arguments.
 - Une méthode à connaître : factorisation par l'angle moitié.
- Ex. Module et arguments de $1 + e^{it}$ ou $1 - e^{it}$, à discuter suivant les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ (*)
- Exponentielle complexe et propriétés. Résolution d'équations de la forme $e^z = a$.

III - Applications à la trigonométrie

- Formules de trigonométrie usuelles : linéarisation, factorisation.
 - Transformation de $a \cos x + b \sin x$ et résolution d'équations de la forme : $a \cos x + b \sin x = c$.
 - Application à la trigonométrie :
- Pour transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$:
Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.
- Pour exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec n entier, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:
On a : $\cos(nx) = \text{Re}(e^{inx}) = \text{Re}(\cos x + i \sin x)^n$ et $\sin(nx) = \text{Im}(e^{inx}) = \dots$ d'après la formule de De Moivre
Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.
- Calcul des sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$. (*)

NOUVEAU COURS :IV - Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Rappel / complément : Si z_0 est solution d'une équation polynomiale alors elle se factorise par $(z - z_0)$.

- Racines carrées d'un complexe : Définition, méthode de calcul, tout complexe non nul admet 2 racines carrées opposées.
 - Application à la résolution d'une équation de degré 2.
 - Racine n-ième de l'unité, somme et produit.
- Rq. Une question de cours pourra être de donner la définition et la justification des expressions des racines n-ième de l'unité. (*)
- Racines cubiques de l'unité : 1, j et $\bar{j} = j^2$.
Relations : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et j et j^2 sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$.
 - Résolution de $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$.

V - Nombres complexes et géométrie plane

- Interprétation graphique des complexes, module, argument.
- Affixe d'un point, d'un vecteur, lieux de points usuels (cercles, disques, médiatrices)
- Caractérisation de points alignés, caractérisation de droites perpendiculaires.
- Transformations du plan (définitions + expressions complexes) : symétrie orthogonale d'axe (Ox) / Translations / Rotation de centre Ω et de rayon r / Homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$.

VI - Compléments sur les fonctions à valeurs complexes

- La dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est définie par dérivation de ses parties réelle et imaginaire.
- Dérivation de $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{C}$ et de $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° 6 : Calculs de primitives et d'intégrales

Déroulement d'une colle

1. Une formule de trigonométrie SANS HESITATION ! cf. formulaire
2. Résolution d'une équation de la forme :

$$e^z = a \quad \text{ou} \quad a \cos x + b \sin x = c \quad \text{ou} \quad \text{de degré 2 à coefficients dans } \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad z^n = a.$$

Vous devez être efficaces dans vos calculs.

3. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par (*)
4. Exercice(s) : On commencera par un exercice identique ou très proche d'un exercice « à savoir refaire » (cf. liste ci-dessous).

Un cours non connu entraîne une note < 10.

Exercices Chap. 5Exercice 7 :

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants. On précisera leur module et leurs arguments.

$$1. z_1 = \frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1+i)^5}$$

$$4. z_4 = -2ie^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$5. z_5 = (1-i)^n + (1+i)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$7. z_7 = e^{ix} + e^{-iy}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 10 :

2. Soit u appartenant à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Prouver que : $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \in \mathbb{U}$ ou $z \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 :

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}} \in \mathbb{C}$. On pose : $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

Calculer $A + B$ et $A \times B$. En déduire les valeurs de A et B sous forme algébrique.

Exercice 17 :

Calculer les sommes suivantes (n appartient à $\mathbb{N}$) : $S = \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k}$ et $S' = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$

Exercice 22 : Calcul de sommes.

3. Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 : Équations avec des modules.

1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z+1| = |z|+1$.

2. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $|z| = |1-z| = \frac{1}{|z|}$.

Exercice 24 : Équations avec des arguments.

1. Trouver l'ensemble des complexes z tels que : $2 \arg(z+i) \equiv \arg(z) + \arg(i) \pmod{\pi}$.

Exercice 25 :

2. Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16 \bar{z}^7$.

Exercice 29 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(z+1)^n = (z-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 33 :

1. Déterminer les racines carrées du complexe $5-12i$.

2. Déterminer la/les solution(s) imaginaire(s) pure(s) de l'équation (E) : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$.

3. Résoudre l'équation de la question précédente.

Exercice 36 : A savoir retrouver très rapidement !

Soit A, B et M trois points du plan complexe, distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b et z . On pose : $Z = \frac{z-a}{z-b}$.

Montrer que l'on a : 1. A, B, M alignés $\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}^*$

4. ABM rectangle isocèle en $M \Leftrightarrow Z = i$ ou $Z = -i$

2. ABM rectangle en $M \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R}^*$

5. ABM équilatéral $\Leftrightarrow Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3. ABM isocèle en $M \Leftrightarrow |Z| = 1$

Exercice 39 :

a. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : M, P point d'affixe iz et I point d'affixe i sont alignés.

b. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $[z-(1+i)][\bar{z}-(1-i)] = 8$

TRIGONOMETRIE

I – Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

II – Relations entre cos, sin et tan

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

III – Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

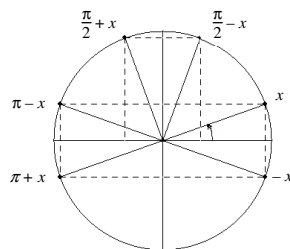
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

Lorsque cela a un sens : $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\tan(x)}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\tan(x)}$

IV – Formules usuelles

Formules d'addition. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$ $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ Lorsque cela a un sens, on a : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	Formules de linéarisation. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$ $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$ $\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
---	---

Formules de duplication. $\forall a \in \mathbb{R},$ $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi\mathbb{Z}}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right) \right), \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	On en déduit : $\forall a \in \mathbb{R}, \cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a))$ $\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a))$
--	--

Formules de factorisation. $\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

Si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $t = \tan \frac{x}{2}$ on a : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ avec $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

Formule de De Moivre.

$$\text{On a : } \forall (\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ c'est-à-dire } \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

V – Équations trigonométriques

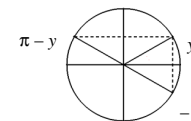
$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi]$$

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi]$$

$$\tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv y [\pi]$$



Cas particuliers :

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

VI – Transformation de $a \cos x + b \sin x$

But : Transformer de $a \cos x + b \sin x$ en $A \cos(x - \theta)$ où a et b sont deux réels, non tous les deux nuls.

Méthode :

- On met en facteur $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et on obtient : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$
- Le complexe $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est de module 1 donc : $\exists \theta \in \mathbb{R}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$
- On obtient : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)$

Rq. Cette transformation est utile lorsqu'on cherche à résoudre une équation de la forme $a \cos x + b \sin x = c$ avec a, b et c des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

VII – Linéarisation de $\cos^p x$ et $\sin^q x$

But : Transformer des produits de $\cos^p x$ et $\sin^q x$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, en somme de $\cos(kx)$ et $\sin(lx)$ où $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

Mth. 1

| Utiliser les formules de trigonométrie.

Mth. 2

| Utiliser les formules d'Euler puis appliquer la formule du binôme de Newton.

Rappel : Formules d'Euler.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

VIII – Exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, avec n entier, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

Mth.

Écrire : $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ d'après la formule de De Moivre
 et $\sin(nx) = \operatorname{Im}(e^{inx}) = \operatorname{Im}((\cos x + i \sin x)^n)$ d'après la formule de De Moivre
 Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton.