Semaine de colles n°6 du 9/11/26 au 13/11/26

DU PROGRAMME PRÉCÉDENT :

- **Les nombres complexes**

I – Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

II – Forme trigonométrique

III – Applications à la trigonométrie

IV – Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Rappel / complément : z_0 est solution d'une équation polynomiale $\Leftrightarrow$ elle se factorise par $(z - z_0)$.

- Racines carrées d'un complexe : Définition, méthode de calcul, tout complexe non nul admet 2 racines carrées opposées.
- Application à la résolution d'une équation de degré 2.
- Racine n-ième de l'unité, somme et produit.

Rq. Une question de cours pourra être de donner la définition et la justification des expressions des racines n-ième de l'unité. ***(*)***

- Racines cubiques de l'unité : 1, j et $\bar{j} = j^2$.

  Relations : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et j et j^2 sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$.
- Résolution de $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$.

V – Nombres complexes et géométrie plane

- Interprétation graphique des complexes, module, argument.
- Affixe d'un point, d'un vecteur, lieux de points usuels (cercles, disques, médiatrices)
- Caractérisation de points alignés, caractérisation de droites perpendiculaires.
- Transformations du plan (définitions + expressions complexes) : symétrie orthogonale d'axe (Ox) / Translations / Rotation de centre Ω et de rayon r / Homothétie de centre Ω et de rapport $k > 0$.

VI – Compléments sur les fonctions à valeurs complexes

- La dérivée d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est définie par dérivation de ses parties réelle et imaginaire.
- Dérivation de $x \longmapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{C}$ et de $t \longmapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

NOUVEAU COURS :

- **Compléments sur la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle**

⚠ Aucune théorie sur la décomposition en éléments simples n'est au programme… par contre, il faut savoir décomposer, sans aide, en éléments simples une fraction rationnelle simple.
Conformément au programme : « Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie »

- **Calcul de primitives et d'intégrales**

Ce chapitre n'a pas pour but de permettre de résoudre des exercices théoriques d'intégration.

I – Rappels et compléments

- Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle borné, relation de Chasles, linéarité, positivité et ordre.
- Lien entre primitives et intégrales.

II – Quelques méthodes de calcul

- Primitives usuelles (en lisant le tableau des dérivées « à l'envers »)
- Transformations judicieuses d'expressions / reconnaitre des dérivées de fonctions composées

  Ex. calcul de $\int_0^{\pi/4} \tan t\, dt$, $\int_0^{\pi/4} \tan^2 t\, dt$, $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, $\int_0^{\pi} \sin(2t) e^{\sin^2 t}\, dt$, $\int_{-2}^{2} \sqrt{t+2}\, dt$, $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^3} dt$

- Primitives de fonctions de la forme : $x \longmapsto \cos^p x \sin^q x$

  Rq. Si *p* ou *q* est impair, on peut faire apparaitre des termes de la forme « $u'(x) \times (u(x))^n$ »
- 2 méthodes pour déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos(\omega x)e^{\lambda x}$ ou $x \longmapsto \sin(\omega x)e^{\lambda x}$
  En utilisant que $\cos(\omega x)e^{\lambda x} = \mathrm{Re}(e^{(\lambda + i\omega)x})$
  Ou en cherchant une primitive sous la forme $x \longmapsto (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{\lambda x}$

Une question de cours pourra être le calcul d'une primitive d'une fonction de cette forme. ***(*)***

- Primitives de fonctions rationnelles :

  Primitives de $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ dans le cas de pôle simple / pôle double. ***(* - sur un exemple)***

  Ex. Primitives de $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

III – Formule d'intégration par parties

- Intégration par parties pour les fonctions de **classe C^1**, application au calcul de primitives.

Ex. Primitives de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$ ***(* - citer le th et faire l'application)***

IV – Changement de variable

- Changement de variable : application aux calculs d'intégrales et de primitives
- Un changement de variable à connaitre pour les fonctions en sin, cos et tan : $t = \tan\frac{x}{2}$.

Ex. Sur $]0, \pi[$, une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\sin x}$ est $x \longmapsto \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ ***(*)***

(*) Démonstrations / Méthodes à connaître et TOUT le cours est à connaître !

Prévisions semaine n° ;7 : EDL

Déroulement d'une colle

1. Résolution d'une équation de la forme :
   $e^z = a$ ou polynomiale de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ ou $z^n = a$.
   Vous devez être efficaces dans vos calculs.
2. Une question de cours : méthode ou démonstration signalées par ***(*)***
3. Exercice(s) :
4. On commencera par le calcul d'une primitive/intégrale, sans IPP ni changement de variable mais petites transformations d'expressions, reconnaitre la dérivé d'une composée, décomposition en éléments simples, …

Un cours non connu entraine une note < 10.

Semaine de colles n°6 du 9/11/26 au 13/11/26 - Exercices à savoir refaire

Exercices Chap. 5

Exercice 25 :

2. Trouver tous les complexes z tels que : $z^3 = -16\,\overline{z}^{\,7}$.

Exercice 29 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(z+1)^n = (z-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. *On donnera les solutions sous forme algébrique*.

Exercice 33 :

1. Déterminer les racines carrées du complexe $5 - 12i$.
2. Déterminer la/les solution(s) imaginaire(s) pure(s) de l'équation (E) : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$.
3. Résoudre l'équation de la question précédente.

Exercice 36 : *A savoir retrouver très rapidement !*

Soit A, B et M trois points du plan complexe, distincts deux à deux, d'affixes respectives a, b et z. On pose : $Z = \dfrac{z-a}{z-b}$.

Montrer que l'on a : **1.** A, B, M alignés $\Leftrightarrow$ $Z \in \mathbb{R}^*$

2. ABM rectangle en M $\Leftrightarrow$ $Z \in i\mathbb{R}^*$

3. ABM isocèle en M $\Leftrightarrow$ $|Z| = 1$

4. ABM rectangle isocèle en M $\Leftrightarrow$ $Z = i$ ou $Z = -i$

5. ABM équilatéral $\Leftrightarrow$ $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 39 :

a. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : M, P point d'affixe iz et I point d'affixe i sont alignés.
b. Trouver l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\left[z-(1+i)\right]\left[\overline{z}-(1-i)\right] = 8$

Exercices Chap. 6

Pas de liste d'exercices à savoir refaire pour ce chapitre :
Il faut savoir calculer des intégrales et primitives

À vous de vous entrainer sur les exos de la feuille de TD (déjà faits ou dont vous avez eu la correction) .
Pensez aussi à la feuille de calculs !