

Correction du TD n 1

Correction 1 1. f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -2e^{-x} \sin(e^{-x}) \cos(e^{-x}),$$

soit encore

$$x \mapsto -e^{-x} \sin(2e^{-x}).$$

2. f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ de dérivée

$$x \mapsto \frac{-\sin x}{\cos^2(\cos x)}.$$

3. f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

4. f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto \frac{2 \sin x \cos x}{(1 + \cos^2 x)^2}.$$

5. f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -\frac{4x^3}{(1 + x^4)^2}.$$

6. f_6 est définie sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $] -1, +\infty[$ de dérivée

$$x \mapsto -\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} \sin \sqrt{1+x^3}.$$

7. f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -\frac{xe^{-\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} \cos(e^{-\sqrt{1+x^2}}).$$

8. f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -4 \sin x (1 + \cos x)^3 e^{(1+\cos x)^4}.$$

9. f_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -\frac{6x^2}{(1+x^3)^3}.$$

10. f_{10} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -\sin x e^{\cos x}.$$

Correction 2 1. $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$

2. $x \mapsto -3 \sin(x) \cos^2(x)$

3. $x \mapsto \frac{\cos(x) \sin(x)}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$

4. $x \mapsto 3x^2 \cos(1+x^3)$

5. $t \mapsto \frac{-e^t}{(e^t + 1)^2}$

6. $t \mapsto 4e^t(1+e^t)^3.$

7. $x \mapsto -n \sin(x)(1 + \cos(x))^{n-1}$

8. $x \mapsto 4 \cos(x)(1 + \sin(x))^3.$

9. $x \mapsto \frac{2 \sin(x)}{(1 + 2 \cos(x))^2}$

10. $t \mapsto \frac{2t+3}{t^2+3t-2}.$

11. $t \mapsto n2t(t^2-1)^{n-1}$

12. $x \mapsto \frac{-2 \sin(x) \cos(x)}{1 + \cos^2(x)}.$

13. $x \mapsto \frac{1}{2(x + \sqrt{x})}.$

14. $t \mapsto \frac{e^{\tan(t)}}{\cos^2(t)}.$

15. $t \mapsto \frac{e^{\sqrt{t}+1}}{2\sqrt{t}}.$

16. $x \mapsto -\frac{2\cos(x)}{(1+\sin x)^3}.$

Correction 3 1.

2.

3.

4. f_4 est définie sur tout $\mathbb{R}$ et π -périodique. Sa dérivée est $x \mapsto 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$. L'exponentielle étant positive, elle est du signe de $\cos 2x$. On l'étudie sur l'intervalle $[0, \pi]$.

- Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $2x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(2x) \geq 0$.
- Si $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $2x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\cos(2x) \leq 0$.
- Enfin, si $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, $2x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ et $\cos(2x) \geq 0$.

On a :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f_4'(x)$	+	0	-	+
f_4	1	e	$\frac{1}{e}$	1

Correction 4 Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0.$$

On a également $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Pour tout $x \neq 0$, on a $f'(x) = f'(x) =$

$$\frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Pour le tableau de variations, il faut déterminer le signe de f' . On remarque que $f'(x)$ est de même signe que $u(x) = e^x - 1 - xe^x$. Cette fonction est dérivable, on la dérive pour connaître son signe: $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$ donc

u' est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$, elle atteint donc son maximum en 0 en lequel elle vaut 0; on a donc $u(x) \leq 0$ ce qui montre que f est décroissante. On a le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$		0

Remarque. Nous montrerons plus tard que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ en identifiant $f(x)$ à un taux d'accroissement.

Correction 5 1.

2.

3.

4. On a $x \geq 2$ donc $x - 1 > 0$. On raisonne par équivalence:

$$\frac{x^2 - 2}{x - 1} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 2x - 2 \Leftrightarrow x(x - 2) \geq 0$$

La dernière inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi.

Correction 6 1. On peut étudier les variations de $f(x) = \ln(1 + x) - x$. f est dérivable et sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{-x}{1 + x}$$

donc f est croissante sur $] -1, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$, elle est donc majorée par sa valeur en 0 c'est-à-dire 0; on a donc $\forall x \in] -1, +\infty[$ $f(x) \leq 0$ donc $\ln(1 + x) \leq x$.

2. On écrit $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. L'encadrement que l'on doit montrer est alors équivalent, par croissance de l'exponentielle, à :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 \leq -n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ donc, d'après la question précédente, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ ce qui donne un premier côté de l'encadrement.

Pour tout $n > 1$, on a $-\frac{1}{n} > -1$ donc, d'après la question précédente, $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$, ce qui implique $-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 1$ et achève la démonstration de l'encadrement.

Correction 7 On pose $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$. La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1	$\longrightarrow$ 0

Correction 8 On pose $f : x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$. Elle est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Pour tout $x \in] -1, 1[$, on a

$$f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2) - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a le tableau de variations suivant :

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$ 1 $\searrow$ 0

Correction 9 On peut se convaincre que c'est faux en remarquant que deux fonctions croissantes f et g vérifient, pour tout $x \leq y$:

$$f(x) \leq f(y) \text{ et } g(x) \leq g(y),$$

ce qui n'implique pas $f(x)g(x) \leq f(y)g(y)$ en général. Prenons par exemple $f : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto x$, elles sont toutes les deux strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ mais leur produit $fg : x \mapsto -\sqrt{x}$ est strictement décroissant.

Correction 10 On pose $f : x \mapsto e^x - x$ et $g : x \mapsto (1-x)e^x$. On a f dérivable de dérivée $f'(x) = e^x - 1$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, elle est minorée par $f(0) = 1$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$ d'où $e^x \geq 1+x$.

De même, g est dérivable et $g'(x) = -xe^x$ donc g est décroissante sur $[0, 1]$ et on a $g(0) = 1$ donc : $\forall x \in [0, 1], (1-x)e^x \leq 1$. En divisant par $(1-x)$ qui est positif, on a l'inégalité souhaitée.

Correction 11 On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & xe^{-x/4} \end{cases}$. Alors f est dérivable et sa dérivée s'annule en $x = 4$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	4	$+\infty$
f	0	$\nearrow$ $4e^{-1}$ $\searrow$	0

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq 4e^{-1}$. Or $4e^{-1} < 2$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) < 2.$$

Correction 12 1. Pour tout $t \in [1, 10]$, on a $0 \leq \ln(t) \leq \ln(10)$ et $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{t} \leq 1$, on en déduit que

$$0 \leq \frac{\ln(t)}{t} \leq \ln(10),$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin(t) \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. On a donc $-1 \leq \frac{\sin(t)}{1+t^2} \leq 1$.

3. Pour tout $t \in [0, 3]$, on a $1-3a \leq 1-at \leq 1$ et $1 \leq 2e^t - 1 \leq 2e^3 - 1$ donc $\frac{1}{2e^3-1} \leq \frac{1}{2e^t-1} \leq 1$. Là il faut être prudent car on ne connaît pas le signe de $1-3a$.

- Si $1-3a \geq 0$ c'est-à-dire $a \leq \frac{1}{3}$, alors $\frac{1-3a}{2e^3-1} \leq \frac{1-at}{2e^t-1} \leq 1$.
- Si $a < \frac{1}{3}$, alors $\frac{1-3a}{2e^t-1} \leq \frac{1-3t}{2e^t-1} \leq \frac{1}{2e^t-1} \leq 1$. En revanche, on a $\frac{1}{2e^t-1} \leq 1$ qui implique $\frac{1-3a}{2e^t-1} \geq 1-3a$ puisque l'on multiplie l'inégalité

par une quantité négative. On a donc

$$1 - 3a \leq \frac{1 - at}{2e^t - 1} \leq 1.$$

4. Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $0 \leq \ln(1 + t^2) \leq \ln(2)$ et $3t \in [-3, 3]$ donc $\frac{3t}{a + t^2} \in \left[-\frac{3}{a + t^2}, \frac{3}{a + t^2} \right]$ puisque $a + t^2 > 0$. Or $0 \leq \frac{1}{a + t^2} \leq \frac{1}{a}$ donc $\frac{3t}{a + t^2} \in \left[-\frac{3}{a}, \frac{3}{a} \right]$.

On en déduit que pour tout $t \in [-1, 1]$, $f_4(t) \in \left[-3 \left(1 + \frac{1}{a} \right), 3 \left(a + \frac{1}{a} \right) \right]$.

5. Soit $t \in [-1, 1]$, on a

$$|f_5(t)| = \left| \frac{at^2}{1 + e^t} - \frac{t^2}{a^2} \right| \leq \frac{at^2}{1 + e^t} + \frac{t^2}{a^2} \leq \frac{a}{2} + \frac{1}{a^2}$$

donc un majorant est $\frac{a}{2} + \frac{1}{a^2}$ et un minorant est $-\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a^2} \right)$. Si on veut être plus précis, on écrit

$$0 \leq \frac{at^2}{1 + e^t} \leq \frac{a}{2} \text{ et } -\frac{1}{a^2} \leq -\frac{t^2}{a^2} \leq 0,$$

on obtient

$$-\frac{1}{a^2} \leq f_5(t) \leq \frac{a}{2}$$

donc un majorant est $\frac{a}{2}$ et un minorant est $-\frac{1}{a^2}$.

Correction 13 On fait une intégration par parties, on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = t$, on a $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = \frac{t^2}{2}$. On a

$$\begin{aligned} \int_1^2 t \ln t \, dt &= \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t}{2} \, dt \\ &= 2 \ln(2) - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^2 \\ &= 2 \ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Correction 14 On fait une intégration par parties. On pose $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$, on a $u'(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x \, dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx.$$

On fait une deuxième intégration par parties. On pose $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin x$, on a $u'(x) = e^x$ et $v(x) = -\cos x$. On a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x \, dx = [e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [e^x \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x \, dx.$$

On en déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x \, dx = \left[\frac{(\sin x + \cos x)e^x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Correction 15 On fait une intégration par parties, on pose $u(t) = t^2 - t + 1$ et $v'(t) = e^{-t}$, on a $u'(t) = 2t - 1$ et $v(t) = -e^{-t}$. On a

$$\int_0^1 (t^2 - t + 1)e^{-t} \, dt = [-(t^2 - t + 1)e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 (2t - 1)e^{-t} \, dt.$$

On fait une nouvelle intégration par parties, on pose $u(t) = 2t - 1$ et $v'(t) = e^{-t}$, on a $u'(t) = 2$ et $v(t) = -e^{-t}$. On a

$$\int_0^1 (2t - 1)e^{-t} \, dt = [-(2t - 1)e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-t} \, dt = [-(2t - 1)e^{-t} - 2e^{-t}]_0^1 = -3e^{-1} + 1.$$

On a donc

$$\int_0^1 (t^2 - t + 1)e^{-t} \, dt = 1 - e^{-1} + 1 - 3e^{-1} = 2 - 4e^{-1}$$

Correction 16 • Si $n \neq 1$, on fait une intégration par parties. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^{-n}$. On a $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^{-n+1}}{1-n}$. On a donc :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^n} \, dx = \left[-\frac{\ln t}{(n-1)t^{n-1}} \right]_1^e + \int_1^e \frac{dx}{(n-1)x^n} = \left[-\frac{\ln t}{(n-1)t^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 t^{n-1}} \right]_1^e = \frac{1}{(n-1)^2}$$

• Si $n = 1$, on reconnaît une dérivée de la forme $u' \cdot u$, on a donc $\int_1^e \frac{\ln t \, dx}{t} =$

$$\left[\frac{1}{2} \ln t \right]_1^e = \frac{1}{2}.$$

Correction 17 On peut poser le changement de variable $u = x^3$, on a alors $du = 3x^2 dx$ et u varie de 0 à 1. On a donc

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+u}}{3} \, du = \left[\frac{2}{9} (1+u)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

On peut aussi écrire $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 3x^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx$ pour reconnaître une

dérivée de la forme $u' \cdot u^{1/2}$. On a alors $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^3} \, dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} (1 + t^3)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{9}.$

Correction 18 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $\frac{u'}{u}$ donc

$$\int_0^2 \frac{t^2}{1+t^3} dx = \left[\frac{1}{3} \ln(t^3+1) \right]_0^2 = \frac{\ln(9)}{3}.$$

On peut aussi poser $y = x^3$, on a $dy = 3x^2 dx$, y varie de 0 à 8. On a donc

$$\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \int_0^8 \frac{1}{3(1+y)} dy = \left[\frac{1}{3} \ln(1+y) \right]_0^8$$

On retrouve

$$\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{\ln(9)}{3}$$

Correction 19 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $u'e^u$, on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\cos(x)} dx = \left[-e^{\cos(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1$$

On peut aussi poser $y = \cos(x)$, on a $dy = -\sin(x)dx$ et y varie de 1 à 0 donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\cos(x)} dx = \int_1^0 -e^y dy = -1 + e = e - 1$$

Correction 20 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $u'.u$. On a

$\int_1^2 te^{t^2} dt = \frac{1}{2}(e^4 - e)$. On peut aussi $x = t^2$. On a $dx = 2tdt$ et x varie de 1 à 4 donc

$$\int_1^2 te^{t^2} dt = \int_1^4 \frac{1}{2} e^x dx = \left[\frac{e^x}{2} \right]_1^4 = \frac{1}{2}(e^4 - e)$$

Correction 21 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $\frac{u'}{u}$. On a $\int_2^3 \frac{dt}{t \ln t} = [\ln |\ln(t)|]_2^3 = \ln \ln(3) - \ln \ln(2)$.

On peut aussi poser $x = \ln(t)$, on a $dx = \frac{dt}{t}$ et x varie de $\ln(2)$ à $\ln(3)$ donc

$$\int_2^3 \frac{dt}{t \ln t} = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = \ln \ln(3) - \ln \ln(2)$$

Correction 22 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $u'.u$. On a

$$\int_1^2 \frac{\ln t dt}{t} = \left[\frac{1}{2} (\ln(t))^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln^2(2).$$

On peut aussi poser $x = \ln(t)$, on a $dx = \frac{dt}{t}$ et x varie de 0 à $\ln(2)$. On a donc

$$\int_1^2 \frac{\ln t dt}{t} = \int_0^{\ln(2)} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2} \ln^2(2).$$

Correction 23 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. On a

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}} = [\sqrt{1+t^2}]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - 1.$$

On peut aussi poser $y = t^2$, on a $dy = 2tdt$ et y varie de 0 à 2 donc

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{1+y}} dy = \left[\sqrt{1+y} \right]_0^2 = \sqrt{3} - 1$$