

Maths - DS n° 1

Préliminaire : quatre questions indépendantes

1. Soit y une suite numérique de premier terme $y_0 = 2$ et telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $y_{p+1} = 2y_p - p$.
Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $y_p = 2^p + p + 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer les nombres :

$$B_n = \sum_{i=2}^{n+1} 5t^{i+1} \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} 3^k$$

3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'implication :

$$\frac{n(n+2)}{4} \notin \mathbb{Z} \implies n \text{ impair}$$

4. Montrer pour tout $s \geq 0$ l'inégalité : $\sqrt{s} \leq 1 + \frac{s}{4}$.
-

EXERCICE 1 : (Nombres complexes)

1. Mettre $1 - i$ et $\sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle.
 2. En déduire la forme exponentielle de $(1 - i)^3$ et $(\sqrt{3} + i)^4$.
 3. Déterminer la forme exponentielle de $\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4}$.
 4. Déterminer, sans calcul, la forme algébrique de $(1 - i)^3$ et $(\sqrt{3} + i)^4$.
 5. Déterminer la forme algébrique de $\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4}$.
 6. Que vaut $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$?
 7. En remarquant que $\frac{17\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$, retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ trouvée à la question précédente.
-

EXERCICE 2 : (Entiers définis de façon implicite)

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de nombres **entiers** a_n et b_n tels que

$$(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

1. Soit $p, q \in \mathbb{Z}$. On suppose que $p + q\sqrt{2} = 0$. En utilisant le fait que $\sqrt{2}$ est un irrationnel, montrer que $p = q = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que si les nombres a_n et b_n existent, alors ils sont uniques.
3. Montrer l'existence et déterminer les couples (a_0, b_0) , (a_1, b_1) et (a_2, b_2) .
4. Montrer par récurrence l'existence, pour tout entier naturel n , des entiers a_n et b_n .
Préciser les relations de récurrence donnant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
5. Montrer que la suite $(a_n^2 - 2b_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $a_n^2 - 2b_n^2$.

EXERCICE 3 : (Somme alternée)

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k k$.

1. Rappeler l'expression de S_n .
2. On suppose n pair et on considère $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$.
 - (a) Calculer $A = S_n + T_n$. On pourra séparer les termes d'indice pair et ceux d'indice impair.
 - (b) Calculer $B = S_n - T_n$.
 - (c) Vérifier la cohérence de vos résultats en calculant $A + B$.
 - (d) Donner une expression de T_n en fonction de m .
3. Dédurre de l'expression de T_{2m} celle de T_{2m+1} .

EXERCICE 4 : (Somme des inverses des coefficients binomiaux)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Simplifier $\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}$ et $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Montrer :

$$\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+2)(U_n - 1) - (2n+2)\left(U_{n+1} - \frac{1}{n+1} - 1\right) = -n$.
 4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simplifiée de U_{n+1} en fonction de n et U_n .
 5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$.
-

Correction DS n° 1

Corrigé du préliminaire

- On procède par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(p) = [y_p = 2^p + p + 1]$.
 - Initialisation : $\mathcal{H}(0)$ signifie $[y_0 = 2^0 + 0 + 1 = 2]$, ce qui est vrai.
 - Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(p)$. Montrons $\mathcal{H}(p+1)$, c'est-à-dire $[y_{p+1} = 2^{p+1} + p + 2]$.
On écrit :

$$\begin{aligned}y_{p+1} &= 2y_p - p \\&= 2(2^p + p + 1) - p \quad \text{d'après } \mathcal{H}(p) \\&= 2^{p+1} + 2p + 2 - p \\&= 2^{p+1} + p + 2\end{aligned}$$

ce qui démontre $\mathcal{H}(p+1)$.

- Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(p)$ est vraie.

- Calcul de B_n . Si $t \neq 1$, on a :

$$B_n = 5t \sum_{i=2}^{n+1} t^i = 5t \cdot \frac{t^2 - t^{n+2}}{1 - t} = \boxed{\frac{5}{1-t} [t^3 - t^{n+3}]}$$

Si $t = 1$:

$$B_n = \sum_{i=2}^{n+1} 5 = \boxed{5n}$$

- Calcul de C_n .

$$\begin{aligned}C_n &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 3^k - \underbrace{\binom{2n}{0} 3^0}_{\text{terme en } k=0} \\&= (3+1)^{2n} - 1 \quad (\text{binôme de Newton avec } a=3, b=1) \\&= \boxed{4^{2n} - 1}\end{aligned}$$

- On raisonne par contraposée. Si n est pair alors $n = 2a$ avec a entier. On a alors $\frac{n(n+2)}{4} = a(a+1) \in \mathbb{Z}$. On en déduit que

$$\frac{n(n+2)}{4} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow n \text{ impair}$$

- Soit $s \geq 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\sqrt{s} \leq 1 + \frac{s}{4} &\iff s \leq \left(1 + \frac{s}{4}\right)^2 \quad ((t \mapsto t^2) \text{ est strict. croissante sur } \mathbb{R}_+) \\&\iff s \leq 1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{16} \\&\iff 16s \leq 16 + 8s + s^2 \\&\iff s^2 - 8s + 16 \geq 0 \\&\iff (s-4)^2 \geq 0 \quad \text{ce qui est VRAI.}\end{aligned}$$

Par remontée des équivalences, la première inégalité est donc vraie.

Corrigé exercice 1

1. On commence par calculer le module : $|1 - i| = \sqrt{2}$ donc $1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right)$. Un argument de $1 - i$ est $-\frac{\pi}{4}$ donc $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

De même, $\sqrt{3} + i$ est de module 2 donc $\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$. On voit alors qu'un argument de $\sqrt{3} + i$ est $\frac{\pi}{6}$ donc $\boxed{\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{i\pi}{6}}}$.

2. On a

$$(1 - i)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} \right)^3 = \left(\sqrt{2} \right)^3 e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \boxed{2\sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$$

et

$$(\sqrt{3} + i)^4 = \left(2e^{\frac{i\pi}{6}} \right)^4 = 2^4 e^{\frac{4i\pi}{6}} = \boxed{16e^{\frac{2i\pi}{3}}}.$$

3. On écrit :

$$\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4} = \frac{2\sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}}{16e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-(\frac{3i\pi}{4} + \frac{2i\pi}{3})} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{8} e^{-\frac{17i\pi}{12}}}.$$

4. Pour déterminer la forme algébrique de $(1 - i)^3$, on utilise sa forme exponentielle :

$$(1 - i)^3 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}} = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = \boxed{-2 - 2i}.$$

De même, on a :

$$(\sqrt{3} + i)^4 = 16e^{\frac{2i\pi}{3}} = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{8(-1 + i\sqrt{3})}.$$

5. Pour déterminer la forme algébrique de $\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4}$, on utilise la question précédente :

$$\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4} = \frac{-2 - 2i}{8(-1 + i\sqrt{3})} = \frac{-1 - i}{4(-1 + i\sqrt{3})}.$$

On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4} = \frac{(-1 - i)(-1 - i\sqrt{3})}{4|-1 + i\sqrt{3}|^2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + i - \sqrt{3}}{16} = \boxed{\frac{(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{16}}.$$

On a trouvé la forme algébrique de $\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4}$.

6. En utilisant les formes exponentielles et algébriques de $\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4}$, on a :

$$\frac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} + i)^4} = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-\frac{17i\pi}{12}} = \frac{(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{16}.$$

On a donc :

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \left(\cos \frac{17\pi}{12} - i \sin \frac{17\pi}{12} \right) = \frac{(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})}{16}$$

On identifie la partie réelle des deux expressions :

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \cos \frac{17\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{16}.$$

On en déduit que

$$\cos \frac{17\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

ou encore :

$$\boxed{\cos \frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}.$$

7. On écrit $\frac{17\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}$ puis on applique la formule de $\cos(a + b)$:

$$\begin{aligned} \cos \frac{17\pi}{12} &= \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

On retrouve le résultat de la question précédente :-)

Corrigé exercice 2 :

1. **Par l'absurde** : si $q \neq 0$ alors l'égalité $p + q\sqrt{2} = 0$ donne $\sqrt{2} = \frac{-p}{q} \in \mathbb{Q}$. Or, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d'où une **contradiction**.

Donc $\boxed{q = 0}$, ce qui implique $p + 0 \cdot \sqrt{2} = 0$ et donc $\boxed{p = 0}$.

2. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe deux couples d'entiers (a_n, b_n) et (c_n, d_n) tels que

$$\left(\sqrt{2} - 1 \right)^n = a_n + b_n \sqrt{2} = c_n + d_n \sqrt{2}$$

On a donc :

$$\underbrace{(a_n - c_n)}_{\in \mathbb{Z}} + \sqrt{2} \underbrace{(b_n - d_n)}_{\in \mathbb{Z}} = 0$$

Alors d'après la question précédente, cela implique $\begin{cases} a_n - c_n = 0 \\ b_n - d_n = 0 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a_n = c_n \\ b_n = d_n \end{cases}$.

Le couple (a_n, b_n) est donc unique, s'il existe.

3. $(\sqrt{2} - 1)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$, donc le couple $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$ convient.

$$(\sqrt{2} - 1)^1 = -1 + \sqrt{2}, \text{ donc le couple } \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = 1 \end{cases} \text{ convient.}$$

$$(\sqrt{2} - 1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}, \text{ donc le couple } \begin{cases} a_2 = 3 \\ b_2 = -2 \end{cases} \text{ convient.}$$

4. Récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathcal{H}(n) = \left[\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } (\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n \sqrt{2} \right]$$

— initialisation : $\mathcal{H}(0)$ est vraie. En effet, on a vu qu'il suffit de poser $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - 1)^{n+1} &= (\sqrt{2} - 1)^n \times (\sqrt{2} - 1) \\ &\stackrel{\mathcal{H}(n)}{=} (a_n + b_n\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) \\ &= a_n\sqrt{2} - a_n + 2b_n - b_n\sqrt{2} \\ &= \underbrace{(2b_n - a_n)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(n+1) \text{ est donc vraie, il suffit de poser } \boxed{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 2b_n - a_n \\ b_{n+1} & = & a_n - b_n \end{array}}$$

— conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

5. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = a_n^2 - 2b_n^2$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 \\ &= (2b_n - a_n)^2 - 2(a_n - b_n)^2 \\ &= 4b_n^2 - 4a_nb_n + a_n^2 - 2(a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2) \\ &= -a_n^2 + 2b_n^2 \\ &= \boxed{-v_n} \end{aligned}$$

v est donc une suite géométrique, de raison (-1) .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times (-1)^n = (a_0^2 - 2b_0^2)(-1)^n = (-1)^n$.

Donc $\boxed{a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n}$

Corrigé exercice 3

1. On a $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} A &= S_{2m} + T_{2m} \\ &= \sum_{k=0}^{2m} (1 + (-1)^k) k \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2m \\ k \text{ pair}}} 2k \\ &= \sum_{j=0}^m 4j \text{ en posant } k = 2j \\ &= \boxed{2m(m+1)} \end{aligned}$$

(b) De même, on écrit :

$$\begin{aligned}
 B &= S_{2m} - T_{2m} \\
 &= \sum_{k=0}^{2m} (1 - (-1)^k) k \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2m \\ k \text{ impair}}} 2k \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} 2(2j+1) \text{ en posant } k = 2j+1 \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} 4j + \sum_{j=0}^{m-1} 2 \\
 &= 2m(m-1) + 2m \\
 &= \boxed{2m^2}
 \end{aligned}$$

(c) On a $A + B = 2S_n = n(n+1)$. D'après les résultats trouvés aux questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
 A + B &= 2m(m+1) + 2m^2 \\
 &= 2m(2m+1) \\
 &= n(n+1)
 \end{aligned}$$

Les résultats sont donc cohérents.

(d) On remarque que $A - B = 2T_n$. On a donc

$$\begin{aligned}
 2T_n &= 2m(m+1) - 2m^2 \\
 &= 2m
 \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{T_{2m} = m}$.

3. Les deux sommes T_{2m} et T_{2m+1} ne diffèrent que d'un seul terme : celui en $k = 2m+1$. D'où :

$$\begin{aligned}
 T_{2m+1} &= T_{2m} + (-1)^{2m+1}(2m+1) \\
 &= m - (2m+1) \\
 &= \boxed{-(m+1)}
 \end{aligned}$$

Corrigé exercice 4

1. On a

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{\overbrace{(n+1)!}^{=(n+1).n!}}{k! \underbrace{(n-k+1)!}_{=(n-k+1).(n-k)!} n!} = \boxed{\frac{n+1}{n-k+1}}$$

et

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n! \overbrace{k!}^{=(n-k).(n-k-1)!}}{\underbrace{(k+1)!}_{=(k+1).k!} (n-k+1)! n!} = \boxed{\frac{n-k}{k+1}}$$

2. La question précédente permet d'exprimer $\binom{n}{k+1}$ et $\binom{n+1}{k}$ en fonction de $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k}$$

On a donc d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} &= \frac{k+1}{\binom{n}{k}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{2k-n}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{k}} \left((n+2) - (2n+2) \frac{n-k+1}{n+1} \right) \\ &= \frac{n+2-2(n-k+1)}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{2k-n}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

Les deux quantités sont donc bien égales.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$$

On somme ces égalités pour k variant de 0 à $n-1$:

$$(n+2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} - (2n+2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \right)$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} - 1 = U_n - 1$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \frac{1}{n+1} - 1 = U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1}$$

on a donc

$$(n+2)(U_n - 1) - (2n+2) \left(U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-(k+1)-1}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \right)$$

On reconnaît une somme télescopique dans le membre de droite, d'où :

$$(n+2)(U_n - 1) - (2n+2) \left(U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{\binom{n}{n}} - \frac{n+1}{\binom{n}{0}} = -n$$

On a bien l'égalité souhaitée.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(n+2)(U_n - 1) - (2n+2) \left(U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} \right) = -n$$

donc

$$(2n+2) \left(U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} \right) = (n+2)(U_n - 1) + n,$$

puis

$$U_{n+1} - 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{2n+2}(U_n - 1) + \frac{n}{2n+2},$$

et enfin

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{n+2}{2n+2}(U_n - 1) + \frac{n}{2n+2} = \boxed{\frac{n+2}{2n+2}U_n + 1}$$

5. Nous allons montrer l'égalité par récurrence. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\mathcal{H}(n) : \quad " \quad U_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} \quad "$$

— Initialisation : $U_1 = \frac{1}{\binom{1}{0}} + \frac{1}{\binom{1}{1}} = 1 + 1 = 2$ et

$$\frac{2}{4} \sum_{k=1}^2 \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2^2}{2} \right) = 2$$

donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

— Hérédité : soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{H}(n)$. On a alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \left(\frac{n+2}{2n+2} \cdot U_n \right) + 1 \\ &= \frac{n+2}{2n+2} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} + 1 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} + 1 \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+2}}{n+2} \right) \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+2} \frac{2^k}{k} \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{H}(n+1)$.

— Conclusion : $\forall n \geq 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.