

Techniques fondamentales en analyse

1 Inégalité dans $\mathbb{R}$

Proposition 1.

Soit x, x', y, y' réels.

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $(x \leq y \text{ et } x' \leq y') \Rightarrow x + x' \leq y + y'.$ • $(x \leq y \text{ et } x' < y') \Rightarrow x + x' < y + y'.$ • $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$ • $(x \leq y \text{ et } a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow ax \leq ay$ | <ul style="list-style-type: none"> • $(x \leq y \text{ et } a \in \mathbb{R}^-) \Rightarrow ay \leq ax$ • $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ • $x \leq y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ |
|---|---|

Définition 1. On appelle valeur absolue d'un réel x le réel positif noté $|x|$ égal à

$$\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 2.

1. Soit x, y réels. Alors

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

2. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels, alors

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$$

Exemples 1.

1. Résoudre $\frac{x+1}{x-5} \leq 1$

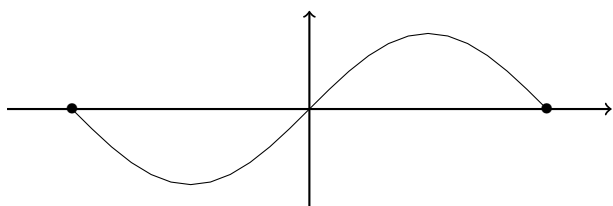
2. Résoudre $x^2 + 3 \leq 1$

3. montrer que $\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{n+k} \right|$ est majoré par 1.

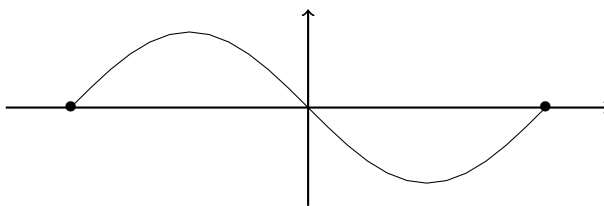
2 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

2.1 Généralités

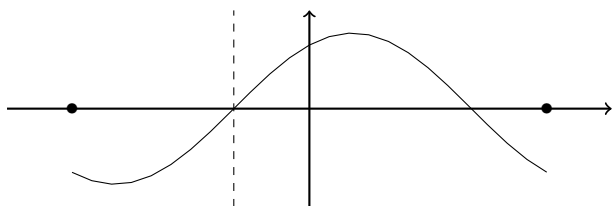
On appelle graphe de f l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.



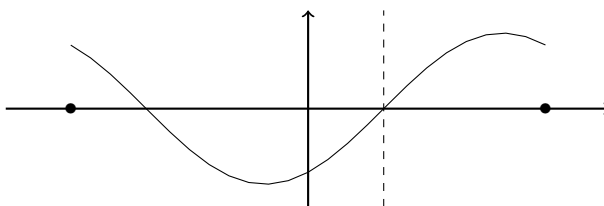
graphe de f



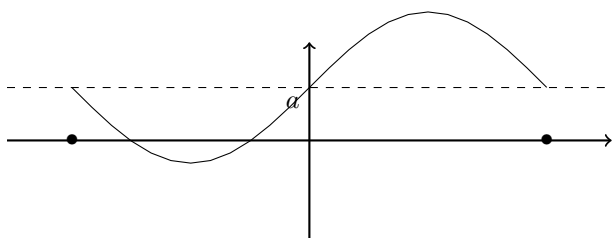
graphe de $x \mapsto f(-x)$



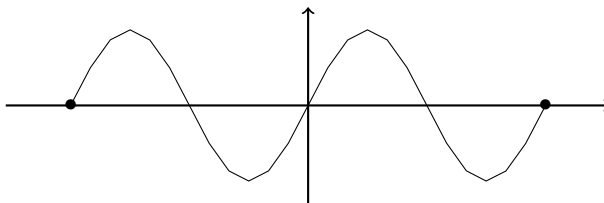
graphe de $x \mapsto f(x+a), a > 0$



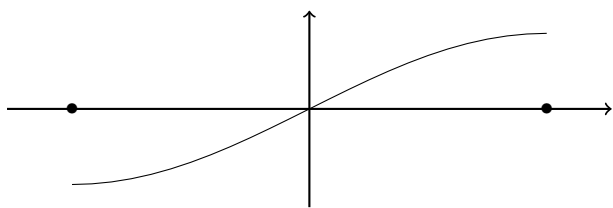
graphe de $x \mapsto f(x+a), a < 0$



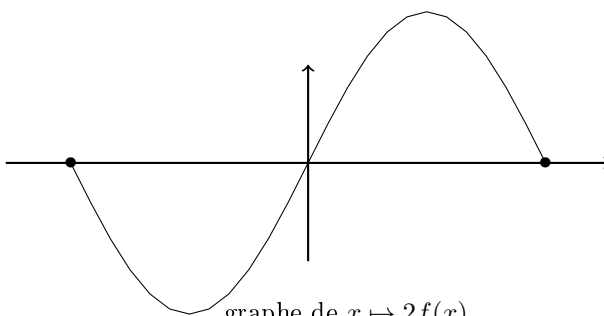
graphe de $x \mapsto f(x) + a, a > 0$



graphe de $x \mapsto f(2x)$



graphe de $x \mapsto f(x/2)$



graphe de $x \mapsto 2f(x)$

Définition 2.

- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec I centré en 0, est dite paire si

$$\forall x \in I, f(-x) = f(x)$$

- Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec I centré en 0, est dite impaire si

$$\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$$

- Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique ou T -périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$ est dite croissante si

$$\forall (x, y) \in D^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$ est dite strictement croissante si

$$\forall (x, y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$ est dite décroissante si

$$\forall (x, y) \in D^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$ est dite strictement décroissante si

$$\forall (x, y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

- Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 3. Soit $f, g : A \rightarrow B$ avec A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

- On appelle somme de f et g et on note $f + g$ la fonction définie sur A par $x \mapsto f(x) + g(x)$.
- On appelle produit de f et g et on note fg la fonction définie sur A par $x \mapsto f(x)g(x)$.

Remarque. La somme de deux fonctions croissantes est croissante, la somme d'une fonction croissante et d'une fonction strictement décroissante.

Définition 4. Soit $f : A \rightarrow B$ avec A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A, f(x) \leq M$$

- On dit que f est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A, f(x) \geq m$$

- On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée. C'est équivalent à demander qu'il existe K tel que

$$\forall x \in A, |f(x)| \leq K$$

2.2 Dérivation

Définition 5. Soit $f : A \rightarrow B$ avec A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en un point a de A s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Elle est dérivable sur A si elle est dérivable en tout point de A .

Proposition 3.

Soit f une fonction dérivable en a , alors l'équation de sa tangente en le point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Proposition 4.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur R , alors

- $f + g$ est dérivable et $(f + g)' = f' + g'$.
- af , avec $a \in \mathbb{R}$ est dérivable et $(af)' = af'$.
- fg est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- $f \circ g$ est dérivable et $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$.

Exemples 2.

1. $x \mapsto \cos(ax)$.
2. $x \mapsto (1 + x^2)^n$.
3. $x \mapsto e^x + \cos(x)$.
4. $x \mapsto 3 \cos(2x)$.

Rappel des dérivées usuelles:

Soit u une fonction dérivable, n un entier:

$$\begin{aligned}(u^n)' &= nu' \cdot u^{n-1} \\ \left(\frac{1}{u^n}\right)' &= \frac{-nu'}{u^{n+1}} \\ (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\ (e^u)' &= u'e^u \\ (\ln |u|)' &= \frac{u'}{u} \\ (\cos \circ u)' &= -u' \sin \circ u \\ (\sin \circ u)' &= u' \cos \circ u \\ (\tan \circ u)' &= \frac{u'}{\cos^2 \circ u} = u' (1 + \tan^2 u)\end{aligned}$$

2.3 Intégration

Définition 6. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On admet que f admet une primitive, c'est-à-dire une fonction F telle que $F' = f$. On définit

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Notations: On note $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Proposition 5.

Soit f, g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, a, b, c et λ des réels. On a :

- $\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b \lambda f(t) + g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$ (linéarité de l'intégrale)
- $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$

Proposition 6.

Soit u, v deux fonctions dérivables, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Exemples 3. • Calculer $\int_0^1 xe^x dx$.

• Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$.

Proposition 7.

Soit f une fonction continue et u une fonction dérivable. On a

$$\int_a^b f \circ u(t) \cdot u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

En pratique:

- On a exprimer la nouvelle variable x en fonction de l'ancienne t (par exemple $x = u(t)$).
- On détermine dans quel intervalle varie cette nouvelle variable (si t varie de a à b , x varie de $u(a)$ à $u(b)$).
- On exprime dx en fonction de dt (on a $dx = u'(t)dt$ qui provient de $\frac{dx}{dt} = \frac{du(t)}{dt} = u'(t)$).
- On exprime $f(t)dt$ à l'aide seulement de x (et dx).



On garde l'ordre des bornes $u(a)$ et $u(b)$ même si $u(a)$ est supérieur à $u(b)$!!

Exemples 4.

1. Faites le changement de variable $u(t) = t^2$ dans l'intégrale $\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} dt$

2. Soit f une fonction paire, que vaut $\int_{-1}^1 f(t) dt$?