

Exercice 1.

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_1 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n + 2^{n+2}$$

Exercice 3.

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(2x) \sin^2(x) \end{aligned}$$

1. Calculer $f(0)$, $f(\frac{\pi}{6})$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f(\frac{\pi}{3})$, $f(\frac{\pi}{2})$.
2. (a) Démontrer que la fonction f est π -périodique.
(b) Étudier la parité de la fonction f .
3. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Justifier que l'on peut restreindre l'étude de la fonction f à l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.
5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\sin(x)$. Justifier à l'aide des formules d'addition.
(b) Factoriser l'expression $f'(x)$ et déterminer les variations de la fonction f sur I .
(c) Déterminer les équations cartésiennes des tangentes au graphe de f aux points d'abscisses 0 , $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
6. (a) Déterminer une solution de l'équation $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$. Aucune justification n'est demandée.
7. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin^2(\theta)$ et $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$. Justifier à l'aide des formules d'addition.
(b) Linéariser l'expression $f(x)$, c'est-à-dire ici l'écrire à l'aide de sommes en fonction de $\cos(2x)$ et $\cos(4x)$.
(c) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$$

Exercice 4.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx$$

1. Montrer que $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$

2. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$.

Exercice 5.

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}_+$.

L'objet de ce problème est de déterminer certaines propriétés des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, f(x+y) \geq f(x) + f(y) \quad (H1)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, f(xy) = f(x)f(y) \quad (H2)$$

1. Solutions constantes
 - (a) On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que la fonction constante $f : x \mapsto c$ est solution du problème posé. Que peut-on en déduire sur la valeur de c ?
 - (b) Déterminer toutes les fonctions constantes qui satisfont (H1) et (H2).
2. Parmi les fonctions puissances
 - (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx$.
 - (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leq y < x$, $(x+y)^n \geq x^n + y^n$.
 - (c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, (x+y)^n \geq x^n + y^n$.
 - (d) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $p_n : x \mapsto x^n$ satisfait (H1) et (H2).
3. Quelques propriétés

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante qui satisfait (H1) et (H2).

 - (a) Montrer que $f(0) = 0$.
 - (b) Montrer que $f(1) = 1$.
 - (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x^n) = (f(x))^n$.
 - (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \neq 0$, on a $f(x) \neq 0$ et $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$.
 - (e) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) \geq 0$.
 - (f) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Correction du Devoir d'entraînement n 1

Exercice 1 On suppose par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n^2 + 1} = m$. On a donc $m > n$. On raisonne par équivalence :

$$\sqrt{n^2 + 1} = m \Leftrightarrow n^2 + 1 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - n^2 = 1 \Leftrightarrow (m - n)(m + n) = 1.$$

On a $m - n \geq 1$ et $m + n \geq 2$ ce qui est absurde. On a montré, par l'absurde, que $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 2 On pose $P_n : u_n = (-1)^n + 2^{n+2}$.

On a $u_0 = 5 = 1 + 2^2$ donc la propriété est vraie au rang 0. On a $u_1 = 7 = -1 + 8$ donc la propriété est vraie au rang 1.

On suppose que pour un certain entier n , P_n et P_{n+1} , montrons que P_{n+2} est vraie. On sait que

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n \\ &= (-1)^{n+1} + 2^{n+3} + 2(-1)^n + 2 \times 2^{n+2} \text{ par hypothèses de récurrence} \\ &= (-1)^n + 2 \cdot 2^{n+3} \text{ car } (-1)^n + (-1)^{n+1} = 0 \\ &= (-1)^{n+2} + 2^{n+4} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n + 2$. Par le principe de récurrence double, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n + 2^{n+2}$$

Exercice 3 On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(2x) \sin^2(x) \end{aligned}$$

1. On a

- $f(0) = 0$,
- $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{8}$,
- $f(\frac{\pi}{4}) = 0$,
- $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{8}$,
- $f(\frac{\pi}{2}) = -1$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \cos(2\pi + 2x) \sin^2(\pi + x) \\ &= \cos(2x) (-\sin(x))^2 \\ &= \cos(2x) \sin^2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a donc bien f π -périodique.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x) \sin^2(x) \\ &= \cos(x) (-\sin(x))^2 \text{ car cos est paire et sin est impaire} \\ &= \cos(x) \sin^2(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a donc bien f paire.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -2 \sin(2x) \sin^2(x) + \cos(2x) 2 \cos(x) \sin(x) = \sin(2x) (\cos(2x) - 2 \sin^2(x)).$$

4. On a f π -périodique, on peut donc réduire son étude à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, comme elle est paire, on peut réduire son étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \sin^2(x) \text{ car } \cos^2 + \sin^2 = 1.$$

- (b) En utilisant la question précédente, on a

$$f'(x) = \sin(2x) (1 - 4 \sin^2(x)).$$

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $2x \in [0, \pi]$ donc $\sin(2x) \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - 4 \sin^2(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sin^2(x) \leq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2} \text{ car pour tout } x \in I, \sin(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ car } \sin \text{ est croissante sur } I \end{aligned}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{3}{8}$	-1

On a donc

- (c) On donne directement les équations des tangentes:

- En 0, la tangente a pour équation $y = 0$
- En $\frac{\pi}{6}$, la tangente a pour équation $y = \frac{3}{8}$.
- En $\frac{\pi}{4}$, la tangente a pour équation $y = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})$.
- En $\frac{\pi}{3}$, la tangente a pour équation $y = -\frac{3}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$.
- En $\frac{\pi}{2}$, la tangente a pour équation $y = -1$

6. (a) Une solution de l'équation $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.
7. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$, on en déduit que
- $$\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}.$$

De même, on sait que $\cos^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ donc $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) \sin^2(x) \\ &= \cos(2x) \times \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2x) - \cos^2(x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos(2x) - \frac{\cos(4x) - 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 \cos(2x) - \cos(4x) + 1) \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(2x) - \cos(4x) + 1 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\sin(2x) - \frac{\sin(4x)}{4} + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Exercice 4 1. On fait un changement de variable en posant $y = \frac{\pi}{2} - x$. x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ donc y varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0. On a $dx = -dy$ et $x = \frac{\pi}{2} - y$:

$$W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(y) \, dy.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]0, 1[$, $\cos x \in]0, 1[$ donc $\cos^n x \geq \cos^{n+1} x, \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On intègre ensuite l'inégalité entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, par croissance de l'intégrale, on obtient $W_n \geq W_{n+1}$ donc la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Comme suggéré, on fait une intégration par parties en écrivant $\cos^{n+2} x = \cos^{n+1} x \cos x$. On pose $u(x) = \cos^{n+1}(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$. On a $u'(x) = -(n+1) \sin(x) \cos^n(x)$ et $v(x) = \sin(x)$. On a alors

$$W_{n+2} = \underbrace{[\cos^{n+1} x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (-(n+1) \sin x \cos^n x) \, dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^n x \, dx$$

d'où

$$W_{n+2} = (n+1) (W_n - W_{n+2}) \text{ ou encore } W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Exercice 5 1. Solutions constantes

(a) D'après (H2), on a en particulier $f(0 \times 0) = f(0) \times f(0)$, c'est-à-dire $c = c^2$. Or $c = c^2 \Leftrightarrow c - c^2 = 0 \Leftrightarrow c(1 - c) = 0 \Leftrightarrow (c = 0 \text{ ou } 1 - c = 0) \Leftrightarrow (c = 0 \text{ ou } c = 1)$. Donc $c = 0$ ou $c = 1$.

De plus, d'après (H1), on $f(0 + 0) \geq f(0) + f(0)$ c'est-à-dire $c \geq 2c$ donc $0 \geq c$. On en déduit que $c = 0$.

(b) D'après la question précédente, s'il existe une fonction constante qui satisfait (H1) et (H2), alors c'est la fonction nulle. Réciproquement, est-ce que la fonction nulle satisfait (H1) et (H2) ?

On note $f_0 : x \mapsto 0$ la fonction nulle (définie sur $\mathbb{R}_+$). Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a $f_0(x + y) = 0 \geq 0 + 0 = f_0(x) + f_0(y)$ et $f_0(xy) = 0 = 0^2 = f_0(x)f_0(y)$. Cela montre que f_0 satisfait (H1) et (H2).

On a montré que la fonction nulle est l'unique fonction constante qui satisfait (H1) et (H2).

2. Parmi les fonctions puissances

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $HR(n) = [\forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx]$. On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $HR(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $HR(1)$ est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \times x \geq 1+1 \times x$. Donc l'assertion $HR(1)$ est vraie.

Hérédité : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, [HR(n) \Rightarrow HR(n+1)]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $HR(n)$ est vraie c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx$.

On veut déduire que $HR(n+1)$ est vraie c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$. Or, d'après $HR(n)$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$ et $(1+x) \geq 0$ donc $(1+x)^n \times (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$. De plus, $(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ car $nx^2 \geq 0$. Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. On a déduit que $HR(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le théorème de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $HR(n)$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leq y < x$. Par hypothèse, $x > 0$. On a donc $(x+y)^n = (x(1+\frac{y}{x}))^n = x^n(1+\frac{y}{x})^n$. D'après la question précédente, on a $(1+\frac{y}{x})^n \geq 1+n\frac{y}{x}$. De plus, $x^n \geq 0$ donc $x^n(1+\frac{y}{x})^n \geq x^n(1+n\frac{y}{x}) = (x^n + nx^n\frac{y}{x}) = x^n + nx^{n-1}y$. Par hypothèse, on a $x > y \geq 0$ donc $x^{n-1} \geq y^{n-1}$ puis $x^{n-1}y \geq y^{n-1}y$. Enfin, $n \geq 1$ donc $nx^{n-1}y \geq 1 \times y^{n-1}y$ c'est-à-dire $nx^{n-1}y \geq y^n$. Donc $(x+y)^n \geq x^n + y^n$.

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leq y < x$, $(x+y)^n \geq x^n + y^n$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$.

★ Si $x < y$, d'après la question précédente, on a $(x+y)^n \geq x^n + y^n$.

★ Si $x = y$, on $(x+y)^n = (2x)^n = 2^n x^n$. Or, $2^n \geq 2$ et $x^n \geq 0$ donc $2^n x^n \geq 2x^n = x^n + y^n$.

Donc $(x+y)^n \geq x^n + y^n$.

★ Si $x > y$ alors $y < x$ donc, d'après la question précédente, on a $(y+x)^n \geq y^n + x^n$ c'est-à-dire $(x+y)^n \geq x^n + y^n$.

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, (x+y)^n \geq x^n + y^n$.

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $p_n : x \mapsto x^n$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente, on a $(x+y)^n \geq x^n + y^n$ c'est-à-dire $p_n(x+y) \geq p_n(x) + p_n(y)$. On a montré que p_n satisfait (H1).

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a $p_n(xy) = (xy)^n = x^n y^n = p_n(x)p_n(y)$. On a montré que p_n satisfait (H2).

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $p_n : x \mapsto x^n$ satisfait (H1) et (H2).

3. Quelques propriétés

- (a) D'après (H1), on a $f(0 \times 0) = f(0) \times f(0)$ c'est-à-dire $f(0) = f(0)^2$. De façon analogue au calcul mené à la question 2)a), on obtient que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. De plus, d'après (H2), on a $f(0+0) \geq f(0) + f(0)$ c'est-à-dire $f(0) \geq 2f(0)$ donc $0 \geq f(0)$. On obtient donc $f(0) = 0$.

- (b) D'après (H1), on a $f(1 \times 1) = f(1) \times f(1)$ c'est-à-dire $f(1) = f(1)^2$. De façon analogue au calcul mené à la question 2)a), on obtient que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.

Montrons par l'absurde que $f(1) \neq 0$. On suppose que $f(1) = 0$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = f(1 \times x) = f(1)f(x) = 0 \times f(x) = 0$. Donc f est la fonction nulle. Or, par hypothèse, f n'est pas une fonction constante donc f n'est pas la fonction nulle. C'est

une contradiction. Donc $f(1) \neq 0$ donc $f(1) = 1$.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $P(n) = [\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x^n) = (f(x))^n]$. On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $P(n)$ est vraie.

Initialisation : Montrons que $P(1)$ est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $f(x^1) = f(x) = (f(x))^1$. Donc l'assertion $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, [P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x^n) = (f(x))^n$.

On veut déduire que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x^{n+1}) = (f(x))^{n+1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $f(x^{n+1}) = f(x^n \times x) = f(x^n)f(x)$ d'après (H2). Or, d'après $P(n)$, on a $f(x^n) = (f(x))^n$. Donc $f(x^{n+1}) = f(x^n)f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1}$. On a déduit que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le théorème de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x^n) = (f(x))^n$.

- (d) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \neq 0$. On a $1 = x \times \frac{1}{x}$ donc, d'après (H2), on a $f(1) = f(x \times \frac{1}{x}) = f(x)f(\frac{1}{x})$. Or, d'après la question 3)b), on a $f(1) = 1$. Donc $1 = f(x)f(\frac{1}{x})$. De plus, $1 \neq 0$ donc $f(x) \neq 0$, $f(\frac{1}{x}) \neq 0$ et $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$.

- (e) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$ donc, d'après (H2), on a $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$. On a montré que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{ on a } f(x) \geq 0$.

- (f) Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $x_1 < x_2$. Alors $x_2 = (x_2 - x_1) + x_1$ avec $x_2 - x_1 \in \mathbb{R}_+$ et $x_1 \in \mathbb{R}_+$. D'après (H1), on a $f(x_2) = f((x_2 - x_1) + x_1) \geq f(x_2 - x_1) + f(x_1)$. D'après la question précédente, on a $f(x_2 - x_1) \geq 0$ donc $f(x_2 - x_1) + f(x_1) \geq 0 + f(x_1) = f(x_1)$. Donc $f(x_2) \geq f(x_1)$.

On a montré que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.