Correction du TD n 3

Correction 1 1. $S_1 = 48$.

2. $S_2 = (n+1)(n+3)$.
3. $S_3 = 2n(2n+2) = 4n(n+1)$
4. $S_4 = 2n(n+2)$.
5. $S_5 = S_3 - \sum_{k=0}^{n} x_k = 4n(n+1) - n(n+2) = n(3n+2)$.

Correction 2 1. Cette somme s'écrit $\sum_{k=0}^{388}(2k+1)$. On la calcule:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{388}(2k+1) &= 2\sum_{k=0}^{388}k + \sum_{k=0}^{388}1\\ &= 388\times 389 + 389\\ &= 389^2\end{aligned}$$

2. On procède comme ci-dessus:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) &= 2\sum_{k=0}^{n-1}k + \sum_{k=0}^{n-1}1\\ &= (n-1)n + n\\ &= n^2\end{aligned}$$

Correction 3 On écrit

$$\begin{aligned}U_n &= \sum_{k=0}^{n}(-2x)^k\\ &= \frac{1-(-2x)^{n+1}}{1+2x}\end{aligned}$$

Correction 4 1. On a $V_0 = 1$ et $V_1 = 1 + ea/n$.

2. On écrit

$$\begin{aligned}V_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{a/n}\right)^k\\ &= \frac{e^a-1}{e^{a/n}-1}\end{aligned}$$

Correction 5 1. Le nombre s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n}10^{-k}$$

Il vaut

$$\sum_{k=0}^{n}10^{-k} = \frac{1-10^{-(n+1)}}{1-10^{-1}} = \frac{1-10^{-(n+1)}}{0.9}$$

Lorsque n tend vers l'infini, on obtient

$$1,1111\ldots = \frac{1}{0.9} = \frac{10}{9}$$

2. On commence par écrire le nombre $0.999\ldots 9$ avec n chiffres après la virgule. Il vaut

$$\sum_{k=1}^{n}9.10^{-k} = 0.9\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1-10^{-n}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$0.99999\ldots = 1$$

Correction 6

Correction 7 1. On pose $j = n+m-k$, alors si k varie de m à n, j varie de n à m. On remplace k par $n+m-j$. On a donc, en remettant les bornes dans l'ordre croissant :

$$S = \sum_{j=m}^{n}(n+m-j).$$

2. D'après la question précédente, on a $S = \sum_{k=m}^{n}(n+m-k)$ car j est une variable muette donc, en sommant les deux expressions connues de S, on a :

$$\begin{aligned}2S &= \sum_{k=m}^{n}(n+m-k)+\sum_{k=m}^{n}k\\&=\sum_{k=m}^{n}(n+m)\\&=(n+m)(n-m+1).\text{car la somme possède } n+m-1 \text{ termes}\end{aligned}$$

On en déduit que $S=\dfrac{(n+m)(n-m+1)}{2}$.

Correction 8

1. On pose $j=n+1-k$. k varie de 1 à n donc j varie de n à 1. On a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2=\sum_{j=1}^{n}j^2$.
2. On pose $j=n-k$. k varie de 1 à n donc j varie de $n-1$ à 0. On a donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^2$.
3. On pose $j=k-1$. k varie de 1 à n donc j varie de 0 à $n-1$. On a donc : $\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2=\sum_{j=0}^{n-1}(n-j)^2$.

Correction 9 On écrit :

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2+\underbrace{(n+2)^2}_{k=n+1},$$

et

$$\sum_{k=0}^{n+1}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)+\underbrace{0(0+1)}_{k=0}+\underbrace{(n+1)(n+2)}_{k=n+1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2-2\sum_{k=0}^{n+1}k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+(k+1)^2-2k(k+1)\right)+(n+2)^2-2(n+1)(n+2)\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)-n(n+2)\\&=n-n(n+2)\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$S=-n(n+1).$$

Correction 10 On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^{1-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{3^k}=3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$.

On utilise ensuite la formule de la somme géométrique:

$$3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}=3\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}1-\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}\left(1-3^{-(n+1)}\right).$$

Correction 11 On a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}2^k=2^{\sum_{k=0}^{n}}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Correction 12 On pose $j=5n+3-k$. Quand k vaut 1, j vaut $5n+2$, quand k vaut n, j vaut $4n+3$. On a donc :

$$\prod_{k=1}^{n}(5n+3-k)=\prod_{j=4n+3}^{5n+2}j=\frac{\prod_{j=1}^{5n+2}j}{\prod_{j=1}^{4n+2}j}=\frac{(5n+2)!}{(4n+2)!}.$$

Correction 13 On pose $j=2n-4+k$. Quand k vaut 0, j vaut $2n-4$, quand k vaut n, j vaut $2n-4$. On a donc :

$$\prod_{k=0}^{n}(2n-4+k)=\prod_{j=2n-4}^{3n-4}j=\frac{\prod_{j=1}^{3n-4}j}{\prod_{j=1}^{2n-5}j}=\frac{(3n-4)!}{(2n-5)!}.$$

Correction 14 On sait que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $k!\leqslant n!$ donc, par sommation des inégalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}k!\leqslant n.n!\leqslant(n+1).n!.$$

On a donc bien l'inégalité souhaitée puisque $(n+1).n!=(n+1)!$

Correction 15 On écrit :

$$\prod_{k=1}^{n}(3k+1)(3k-1)=\frac{\prod_{k=1}^{n}(3k+1)(3k-1)3k}{\prod_{k=1}^{n}3k}.$$

On a $\prod_{k=1}^{n} 3k = 3^n \prod_{k=1}^{n} k = 3^n n!$.

On remarque ensuite que le produit $\prod_{k=1}^{n}(3k+1)(3k-1)3k$ correspond aux produits de tous les entiers compris entre 2 (qui correspond à $k=1$ dans $3k-1$) et $3n+1$ (qui correspond à $k=n$ dans $(3k+1)$). En effet, tout entier s'écrit de la forme $3k$, $3k-1$ ou $3k+1$. On en déduit que $\prod_{k=1}^{n}(3k+1)(3k-1)3k = (3n+1)!$ d'où $\prod_{k=1}^{n}(3k+1)(3k-1) = \dfrac{(3n+1)!}{3^n n!}$.

Correction 16 On a $\prod_{i=1}^{n} 2i = 2^n \prod_{i=1}^{n} i = 2^n n!$. Pour le deuxième produit, on remarque que :

$$\prod_{i=1}^{n}(2i+1) = \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n+1\\ k \text{ impair}}} k.$$

De plus, le produit des entiers impairs inférieurs à $2n+1$ est égal au produit de tous les entiers inférieurs à $2n+1$ divisé par le produit des pairs, autrement dit :

$$\prod_{i=1}^{n}(2i+1) = \frac{\prod_{j=1}^{2n+1} j}{\prod_{i=1}^{n} 2i},$$

ce qui implique, en utilisant le résultat trouvé pour le premier produit:

$$\prod_{i=1}^{n}(2i+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Correction 17 On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}\sum_{k=0}^{p} 2^k &= \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}\left(2^{p+1}-1\right)\\
&= \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q} 2^{p+1} - \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q} 1\\
&= \sum_{q=0}^{n} 2(2^{q+1}-1) - \sum_{q=0}^{n}(q+1)\\
&= \sum_{q=0}^{n} 2^{q+2} - \sum_{q=0}^{n} 2 - \sum_{q=0}^{n} q - \sum_{q=0}^{n} 1\\
&= 4(2^{n+1}-1) - 3(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}\\
&= 2^{n+3} - 4 - \frac{(n+1)(n+6)}{2}
\end{aligned}$$

Correction 18 On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k\\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{2^{n-j+1}-1}{2-1}\\
&= \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j\\
&= n2^{n+1} - 2(2^n-1)\\
&= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$

Correction 19 On coupe la somme en deux :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j.$$

On a :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

De même,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

On a donc :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)=n^2(n+1).$$

Remarque. *On peut aussi dire que i et j jouent des rôles symétriques pour justifier l'égalité des deux sommes.*

Correction 20 On écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(2i-j) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}2i-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}j\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}2i-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}i \text{car les deux variables sont muettes}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i\\ &= \sum_{i=1}^{n}ni\\ &= \frac{n^2(n+1)}{2}\end{aligned}$$

On a donc $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(2i-j)=\frac{n^2(n+1)}{2}$.

Correction 21 On a :
$$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{p=1}^{n}p=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

Correction 22 On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}p &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4} \text{en utilisant la formule trouvée à l'exercice 33}\end{aligned}$$
On a donc :
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}p=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Correction 23 On a :
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}k=\sum_{k=1}^{n}k(k+1).$$
On reconnaît la somme calculée dans l'exercice 22. On a donc :
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}k=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Correction 24 On a
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}n=\sum_{k=1}^{n}n(k+1)=n\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{n^2(n+3)}{2}$$

Correction 25 On pose $k=i+j$. L'entier k varie de 0 à n, $j=k-i$ et i varie donc de 0 à k (car i est forcément plus petit que $i+j$). On a donc :
$$\sum_{i+j\leqslant n}i=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}i=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}k.$$
La première somme a été calculée à l'exercice 33. On a donc :
$$\sum_{i+j\leqslant n}i=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)(2n+4}{12}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Correction 26 On écrit $\sum_{i+j<n}(i+j)=\sum_{i+j<n}i+\sum_{i+j<n}j=2\sum_{i+j<n}i$ car i et j ont des rôles symétriques dans les deux sommes. On pose $k=i+j$. Comme $k<n$, il varie de 0 à $n-1$ et i varie de 0 à k. On a donc :
$$\sum_{i+j<n}(i+j)=2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}i=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}=\sum_{k=0}^{n-1}k^2+\sum_{k=0}^{n-1}k.$$
La première somme a été calculée à l'exercice 33. On a donc :
$$\sum_{i+j<n}(i+j)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Correction 27 Nous allons calculer la somme $S=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i-x_j)^2$. On développe son terme général :
$$\begin{aligned}S &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_i^2-2x_ix_j+x_j^2)\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_i^2-2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_j^2\end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} n = n^2.$$

De même, $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_j^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{i=1}^{n} n = n^2$. Quant à la somme du milieu, elle est égale à

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = n^2.$$

On en déduit que $S = 0$. Or, c'est la somme de carrés réels donc positifs, ils sont donc tous nuls. On en déduit que les réels sont tous égaux et, comme leur somme vaut n, ils sont tous égaux à 1.

Correction 28 On coupe la somme en deux :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \max(i,j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} i\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{i=1}^{n} i(i-1)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i\\
&= 2\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \text{en utilisant la formule trouvée à l'exercice 33}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Correction 29 On coupe la somme en deux :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \min(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \min(i,j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} j\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{i(i-1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j-1)}{2} \text{car } i \text{ est une variable muette}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{en utilisant la formule trouvée à l'exercice 33}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Remarque. *On a calculé* $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ *à l'exercice précédent, on peut vérifier que*

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j) = n^2(n+1).$$

Correction 30 Il suffit de remarquer que la somme $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$ est positive. En effet, si $i < j$, on a le produit de deux termes positifs, si $i > j$, on a le produit de deux termes négatifs.

On développe maintenant cette somme, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i - x_j)(y_i - y_j) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i y_i - x_i y_j - x_j y_i + x_j y_j)\\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_i - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_j y_i + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_j y_j
\end{aligned}$$

On a
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_iy_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_i = n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = n\sum_{k=1}^{n} x_ky_k$$
et
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_jy_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_jy_j = n\sum_{j=1}^{n} x_jy_j = n\sum_{k=1}^{n} x_ky_k.$$
De plus,
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_iy_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right),$$
et de même,
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_jy_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right),$$
car i et j sont des variables muettes.

On a donc :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i-x_j)(y_i-y_j) = 2n\sum_{k=1}^{n} x_ky_k - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right).$$
Comme cette somme est positive, on a donc
$$n\sum_{k=1}^{n} x_ky_k \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right),$$
ce qui est le résultat souhaité.

Correction 31 1. Il suffit d'écrire
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} s_{ij} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij} + \sum_{i=1}^{n} s_{ii} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} s_{ij}.$$
On a $\sum_{i=1}^{n} s_{ii} = 0$ et, comme $s_{ij}=s_{ji}$, $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij} = \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} s_{ij}$.
Ainsi,
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} s_{ij} = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}$$
On peut visualiser ces trois sommes en disant que l'on coupe le tableau en trois parties, la partie strictement au dessus de la diagonale ($j>i$), la diagonale ($i=j$) et la partie strictement en dessous de la diagonale ($i>j$)

2. On va calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_ib_j-a_jb_i)^2$. On a :
$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_ib_j-a_jb_i)^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_ib_j)^2 - 2a_ib_ja_jb_i + (a_jb_i)^2\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_ib_j)^2 - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2a_ib_ja_jb_i + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_jb_i)^2\end{aligned}$$
On écrit maintenant
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_ib_j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i^2b_j^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$
car i et j sont des indices muets.
De même, on a
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_jb_i)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$
On s'intéresse maintenant à la somme du milieu. On a
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2a_ib_ja_jb_i = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_ia_jb_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j\right).$$
Or
$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = \sum_{j=1}^{n} a_jb_j = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k,$$
car i et j sont des indices muets. On a donc :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_ib_j-a_jb_i)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2.$$
On utilise maintenant la question 1. En effet, en posant $s_{ij}=(a_ib_j-a_jb_i)^2$, on a bien $s_{ii}=0$ et $s_{ij}=s_{ji}$ donc on peut appliquer la question 1. On a donc
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_ib_j-a_jb_i)^2 = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

On en déduit que

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2=\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2,$$

ce qui est précisément le résultat souhaité.

3. On a fait le plus dur à la question précédente !!! Il suffit de remarquer que la somme de gauche est positive car c'est une somme de carrées, on obtient alors l'inégalité souhaitée.

Correction 32 On écrit

$$\begin{aligned}\prod_{k=3}^{31}\frac{2k-1}{2k+1} &= \prod_{k=3}^{31}\frac{2(k-1)+1}{2k+1}\\ &= \frac{5}{63}\end{aligned}$$

Correction 33 1. D'après la formule de la somme télescopique, on a :

$$S_n=(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n.$$

2. On écrit :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n\left(k^3+3k^2+3k+1-k^3\right)\\ &= 3\sum_{k=1}^n k^2+3\sum_{k=1}^n k+\sum_{k=1}^n 1\\ &= 3\left(\sum_{k=1}^n k^2\right)+\frac{3n(n+1)}{2}+n\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a $\sum_{k=1}^n k^2=\frac{1}{3}S_n-\frac{n(3n+5)}{6}$. En utilisant l'expression de S_n trouvée à la première question, on trouve :

$$\sum_{k=1}^n k^2=\frac{n^3+3n^2+3n}{3}-\frac{n(3n+5)}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6},$$

ce qui, après factorisation, donne :

$$\sum_{k=1}^n k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Correction 34 1. D'après la formule de la somme télescopique, on a :

$$S_n=(n+1)^4-1=n^4+4n^3+6n^2+4n.$$

2. On écrit :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n\left(k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4\right)\\ &= 4\sum_{k=1}^n k^3+6\sum_{k=1}^n k^2+4\sum_{k=1}^n k+\sum_{k=1}^n 1\\ &= 4\left(\sum_{k=1}^n k^3\right)+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n\text{en utilisant l'exercice 33}\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$4\sum_{k=1}^n k^3=S_n-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n.$$

En utilisant l'expression de S_n trouvée à la première question, on trouve :

$$4\sum_{k=1}^n k^3=n^4+4n^3+6n^2+4n+1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n=n^4+2n^3+n^2,$$

ce qui, après factorisation, donne :

$$\sum_{k=1}^n k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Correction 35 On écrit $\sum_{k=1}^n\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$. On reconnaît alors une somme télescopique, on a donc :

$$\sum_{k=1}^n\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Correction 36 On écrit $\prod_{k=2}^n\frac{k-1}{k}$. On reconnaît alors un produit télescopique, on a donc :

$$\prod_{k=2}^n\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}.$$

Correction 37 On écrit $kk! = (k+1-1).k! = (k+1)! - k!$. On reconnaît alors une somme télescopique d'où:

$$\sum_{k=1}^{n} kk! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - k! = (n+1)! - 1.$$

Correction 38 On écrit : $\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\ &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \end{aligned}$. On reconnaît deux produits télescopiques, on a donc : $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$.

Correction 39 On a :

$$\begin{aligned} \sin(1)\sin(k+1) &= \frac{1}{2}\left(\cos(k) - \cos(k+2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(k) - \cos(k+1) + \cos(k+1) - \cos(k+2)\right) \end{aligned}.$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sin(1)\sin(k+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\left(\cos(k) - \cos(k+1)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+2}\left(\cos(k+1) - \cos(k+2)\right).$$

On reconnaît deux sommes télescopiques, la somme vaut donc :

$$\frac{1}{2}\left(1 - \cos(n+2) + \cos 1 - \cos(n+3)\right).$$

Correction 40 On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{k+1}\right)\cos\left(\frac{1}{k}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{\left(\sin\frac{1}{k+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} \end{aligned}.$$

On reconnaît une somme télescopique, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} = \tan(1) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Correction 41 On écrit :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4^n}{3^n}.$$

Correction 42 On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}2^{1-k} &= 2\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}2^{-k}1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}2^{1-k}\text{par la formule du binôme de Newton} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}+1\right)^n \\ &= \frac{3^n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{1-k} = \frac{3^n}{2^{n-1}}.$$

Correction 43 On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^k &= -1 + \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^k \\ &= -1 + \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} \\ &= -1 + (1-1)^n\text{par la formule du binôme de Newton} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = -1.$$

Correction 44 On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\tbinom{n}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}\right) - \tbinom{n}{n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}1^k 1^{n-k}\right) - \tbinom{n}{n} \\ &= 2^n - 1\text{par la formule du binôme de Newton} \end{aligned}$$

On a donc $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 1$.

Correction 45 On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{-k} &= 2\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\
&= 2\left(-1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) \\
&= 2\left(-1 + \left(1+\frac{2}{3}\right)^n\right) \text{ par la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

Après simplification, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2(5^n - 3^n)}{3^n}.$$

Correction 46 1. 2^n

2. $2^{n-1}n$
3. $n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$.
4. $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
5. $\frac{(1+\alpha)^{n+1}-1}{\alpha(n+1)}$ si $\alpha \neq 0$, 1 sinon.
6. 0 donc $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 + (-1)^k\right) = 2\sum_{1\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k}$.

Correction 47 On écrit

$$\begin{aligned}
(1,01)^{100} &= (1+10^{-2})^{100} \\
&= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 10^{-2k}
\end{aligned}$$

Correction 48 1. On pose $j = 2n+1-k$. On a alors $k = 2n+1-j$. Par ailleurs, k variant de 0 à n, j varie de $n+1$ à $2n+1$. On a donc :

$$S = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-j}.$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on a $\binom{2n+1}{2n+1-j} = \binom{2n+1}{j}$. De plus, j étant une variable muette, on a :

$$S = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

2. On a $2S = S + S = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$, en utilisant les deux expressions de S que l'on connaît. On a donc :

$$2S = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton. On a donc :

$$2S = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1},$$

d'où

$$S = 2^{2n}.$$

Correction 49 On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p}\binom{p}{k} &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{p!}{k!(p-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-p)!(p-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}
\end{aligned}.$$

donc

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

Correction 50 Il suffit de l'écrire. On a :

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1},$$

car $(n+1) - (k+1) = n - k$.

Correction 51 On a :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_{n-k} = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha_{n-k},$$

d'où

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha_{n-k} = n\alpha_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \alpha_{n-k}.$$

On en déduit que :

$$\alpha_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \alpha_{n-k}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\alpha_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha_{n+1-k}.$$

Correction 52 On le montre par récurrence puis changement d'indice. Est-ce pertinent comme exercice?

Correction 53

1. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est clair. On suppose le résultat vrai au rang n. On a :

$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1}} \prod_{i=1}^{n} a^{\alpha_i},$$

donc

$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1}} a^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i},$$

par hypothèse de récurrence. On a donc :

$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = a^{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}.$$

Le résultat est vrai au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout entier n.

2. On pose $k = i + j$, on a $j = i - k$. k varie alors de 0 à n et i varie de 0 à k. On a :

$$\prod_{i+j \leqslant n} a^i b^j = \prod_{k=0}^{n} \prod_{i=0}^{k} a^i b^{k-i} = \prod_{k=0}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k} a^i \prod_{i=0}^{k} b^{k-i} \right).$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\prod_{i=0}^{k} a^i = a^{\sum_{i=0}^{k} i} = a^{\frac{k(k+1)}{2}},$$

et

$$\prod_{i=0}^{k} b^{k-i} = b^{\sum_{i=0}^{k} k-i} = b^{\sum_{j=0}^{k} j} = b^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

On a donc :

$$\prod_{i+j \leqslant n} a^i b^j = \prod_{k=0}^{n} a^{\frac{k(k+1)}{2}} b^{\frac{k(k+1)}{2}} = \prod_{k=0}^{n} (ab)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

On applique, à nouveau, la question 1. On a donc :

$$\prod_{i+j \leqslant n} a^i b^j = (ab)^{\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{2}} = (ab)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}},$$

en utilisant le résultat de l'exercice 22.

Correction 54

1. On écrit :

$$\frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{1}{n^{k-1}} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{1}{n^k} \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On a :

$$nk(n^{k-1}(k-1)!(n-k+1)!) = n^k k!(n-k+1)!$$

et

$$(n-k+1)\left(n^k k!(n-k!)\right) = n^k k!(n-k+1)!$$

donc le dénominateur commun est $\left(n^k k!(n-k+1)!\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1}-\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} &= \frac{n!\,(nk-(n-k+1))}{n^k k!(n-k+1)!}\\ &= \frac{n!(n+1)(k-1)}{n^k k!(n-k+1)!}\\ &= \frac{(n+1)!(k-1)}{n^k k!(n+1-k)!}\\ &= \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}\end{aligned}.$$

On a bien l'égalité souhaitée.

Correction 55 D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},$$

et

$$0=((-1)+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k.$$

En additionnant les deux, on obtient :

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^k\right).$$

Or, dans cette somme, les termes correspondants à k impair sont nuls. On a donc :

$$2^n=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^k\right)=2\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}.$$

On en déduit que :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}=2^{n-1}.$$

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1} &= \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}\\ &= 2^n-2^{n-1}\\ &= 2^{n-1}\end{aligned}.$$

Ainsi, on a montré que :

$$\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}=\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}.$$