

Correction du TD n 4

Correction 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-1 < -1 + \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc $\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \subset]-1, 1[$. On en déduit que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \subset]-1, 1[$$

Pour l'inclusion réciproque, on se donne $x \in]-1, 1[$. On a $x < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq 1 - \frac{1}{n_1} < 1$. De même, on a $-1 < x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{n} = -1$ donc il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $-1 \leq -1 + \frac{1}{n_2} < x$. En prenant $n = \max(n_1, n_2)$, on a $x \in \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ donc $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[-1, 1] \subset \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$. Ceci étant valable pour tout entier non nul n , on a

$$[-1, 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

Soit maintenant $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 - \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $x \in [-1, 1]$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

Correction 2 Montrons l'assertion par un raisonnement direct.

Si $A = B$, on a $A \cap B = A \cup B$. On suppose maintenant que A et B sont tels que $A \cap B \neq A \cup B$. Montrons que $A \neq B$. On le montre par double inclusion. Soit $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B . Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$ ce qui montre l'inclusion $A \subset B$.

Soit maintenant $x \in B$, par le même raisonnement on montre que $x \in A$. Par double inclusion, on a montré $A = B$.

Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposée. On suppose $A \neq B$, montrons que $A \cap B \neq A \cup B$.

Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus (A \cap B)$ ou alors un élément $x \in B \setminus (A \cap B)$. Quitte à échanger les rôles de A et B , nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus (A \cap B)$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Supposons maintenant $A \cap B \neq A \cup B$ et montrons que $A \neq B$. On sait que $A \cap B \subset A \cup B$ donc $A \cap B \neq A \cup B$ s'il existe $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On a alors $x \in A$ ou $x \in B$.

- Si $x \in A$, alors $x \notin B$ puisque $x \notin A \cap B$. On a donc $A \neq B$.
- Si $x \in B$, alors $x \notin A$ puisque $x \notin A \cap B$. On a donc $A \neq B$.

On a montré, par disjonction de cas, que $A \neq B$. On a donc montré l'équivalence par contraposée.

Correction 3 On commence par le raisonnement direct. Si $B = C$, on a bien $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Soient maintenant A, B, C tels que $A \cap B \neq A \cap C$ et $A \cup B \neq A \cup C$. Montrons que $B \neq C$. On le montre par double inclusion. Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cup C$ donc $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$, c'est gagné. Si $x \in A$, alors $x \in B \cap A$. Or $A \cap B \neq A \cap C$, on a donc $x \in C$. Ainsi, on a montré que pour tout $x \in B$, on a $x \in C$ d'où l'inclusion. L'autre inclusion se montre en inversant les rôles de B et C .

Montrons maintenant l'équivalence par contraposée. Supposons $B \neq C$ montrons que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. Comme $B \neq C$, il existe $b \in B \setminus (B \cap C)$ ou $c \in C \setminus (B \cap C)$. S'il existe $b \in B \setminus (B \cap C)$, on a $b \notin c$ et on a deux cas possibles :

- $b \in A$: dans ce cas $b \in A \cap B$ mais $b \notin A \cap C$ puisque $b \notin C$, ce qui montre que $A \cap C \neq A \cap B$.
- $b \notin A$: dans ce cas $b \in A \cup B$ mais $b \notin A \cup C$ puisque $b \notin C$ ce qui montre que $A \cup C \neq A \cup B$.

S'il existe $c \in C \setminus (B \cap C)$, le raisonnement est identique.

Correction 4 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} x \in E \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus A \text{ et } x \in E \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B). \end{aligned}$$

À nouveau, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} x \in E \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus A \text{ ou } x \in E \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (E \setminus A) \cup (E \setminus B). \end{aligned}$$

Correction 5 On raisonne par équivalence:

$$\begin{aligned} &|z+i| = |z-i| \\ \Leftrightarrow &|z+i|^2 = |z-i|^2 \text{ par positivité des quantités} \\ \text{ssi} & z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 = z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 \\ \Leftrightarrow & 2(iz + i\bar{z}) = 0 \\ \Leftrightarrow & 4\operatorname{Re}(iz) = 0 \\ \Leftrightarrow & \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ car } \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z) \\ \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On a montré que :

$$z \in \{z \in \mathbb{C}, |z+i| = |z-i|\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R},$$

les deux ensembles sont donc égaux.

On peut aussi raisonner géométriquement. On note M, A et B les images de z, i et $-i$. On a

$$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \Leftrightarrow M \text{ appartient à } O_x \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$$

On a donc l'égalité entre les deux ensembles.

Correction 6 On peut raisonner par équivalence. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} &|z-1| = |z+1| \\ \Leftrightarrow &|z-1|^2 = |z+1|^2 \text{ par positivité du module} \\ \Leftrightarrow &(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow &-2x = 2x \\ \Leftrightarrow &x = 0 \\ \Leftrightarrow &z \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

On a bien l'équivalence entre $z \in i\mathbb{R}$ et $|z-1| = |z+1|$ donc les deux ensembles sont égaux.

On peut aussi raisonner par double inclusion. Si $z \in i\mathbb{R}$, alors $z = ib, b \in \mathbb{R}$ donc

$$\begin{aligned} |z-1| &= \sqrt{(-1)^2 + b^2} \\ &= \sqrt{1+b^2} \\ &= |z+1| \end{aligned}$$

On a donc l'inclusion $i\mathbb{R} \subset \{z \in \mathbb{C}, |z+1| = |z-1|\}$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z+1| = |z-1|$. On pose $z = a + ib$ avec a, b réels.

On a

$$\sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$$

donc, en élevant au carré

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2$$

ce qui impose $a = 0$. Ainsi, $z = ib$ donc $z \in i\mathbb{R}$.

Par double inclusion, on a montré l'égalité des deux ensembles.

On peut également raisonner de manière géométrique en notant M, A et B les images de $z, -1$ et 1 . On a alors

$$|z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \Leftrightarrow M \text{ appartient à } O_y \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

Correction 7 On peut raisonner par équivalence. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} &|z-1| = |z-i| \\ \Leftrightarrow &|z-1|^2 = |z-i|^2 \text{ par positivité du module} \\ \Leftrightarrow &(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow &-2x = -2y \\ \Leftrightarrow &x = y \\ \Leftrightarrow &\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

On a montré qu'un complexe appartient au premier ensemble si et seulement s'il appartient au deuxième, les deux ensembles sont donc égaux.

On peut aussi raisonner par double inclusion.

Soit donc $z \in \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$, alors $z = a + ia$. On a alors

$$|z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + a^2}$$

et

$$|z-i| = \sqrt{a^2 + (a-1)^2}$$

donc $|z-i| = |z-1|$ et le premier ensemble est inclus dans le deuxième.

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| = |z-i|$, montrons que z vérifie $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

On pose $z = a + ib$ avec a, b réels. On a

$$|z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \text{ et } |z-i| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}.$$

On élève au carré, on obtient

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1,$$

d'où, après simplification, $a = b$. On a donc bien $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)$ ce qui montre l'inclusion réciproque. Les deux ensembles sont bien égaux.

On peut également raisonner de manière géométrique en notant M, A et B les images de $z, 1$ et i . On a alors

$$|z - 1| = |z - i| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB] \Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } \frac{1}{10} = x \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)$$

Correction 8 1. On a

- $f([-3, -1]) = [1, 9]$,
- $f([-2, 1]) = [0, 4]$,
- $f([-3, -1] \cup [-2, 1]) = f([-3, 1]) = [0, 9] = f([-3, -1]) \cup f([-2, 1])$ et
- $f([-3, -1] \cap [-2, 1]) = f([-2, -1]) = [1, 4] = f([-3, -1]) \cap f([-2, 1])$.

2. On a

- $f^{-1}(]-\infty, 2]) = \mathbb{R}$
- $f^{-1}([1, +\infty[) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$,
- et $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[) = f^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$.
- $f^{-1}(]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus]1, 2]) =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [-1, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[= \mathbb{R} \setminus f^{-1}(]1, 2])$.

Correction 9 On a $f^{-1}([0, +\infty[) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, -3]) = \emptyset$ et $f^{-1}([-2, 4]) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Correction 10 Le plus simple est de tracer le tableau de variations de la fonction. La fonction f est dérivable, on a $f' : x \mapsto -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$. On a donc :

x	0	1
f	1	$\frac{1}{2}$

On a donc :

$$f([0, 1]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

De même, on a :

x	-3	0	1
f	$\frac{1}{10}$	1	$\frac{1}{2}$

On en déduit que :

$$f([-3, 1]) = \left[\frac{1}{10}, 1\right].$$

Enfin, pour déterminer l'image réciproque, on se donne $x \in \mathbb{R}$ et on raisonne par équivalence :

$$\frac{1}{4} < f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + x^2 < 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

On a donc l'égalité :

$$f^{-1}\left(\left]\frac{1}{4}, 1\right]\right) =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[.$$

Correction 11 1. Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$.

On a $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$.

De même, $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$ d'où $y \in f(A) \cap f(B)$ ce qui montre l'inclusion

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

L'inclusion réciproque est fausse en général.

Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $A = \mathbb{R}_+^*, B = \mathbb{R}_-^*$. On a $A \cap B = \emptyset$ et $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+^*$ donc $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$.

2. Soit $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$. Si $x \in B$, alors $y = f(x) \in f(B)$. On a donc $y \in f(A) \cup f(B)$ d'où l'inclusion

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

Soit maintenant $y \in f(A) \cup f(B)$, alors soit $y \in f(A)$, soit $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $A \subset A \cup B$, on a $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. De même, si $y \in f(B)$, alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$ et comme $B \subset A \cup B$, on a $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. On a bien l'inclusion réciproque

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

d'où l'égalité.

Correction 13 • Montrons que f est injective : Soit $(x, y) \in [1, +\infty[^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $x^2 - 1 = y^2 - 1$ d'où $x = \pm y$. Or, x et y sont positifs, on a donc $x = y$ et f est injective.

- Montrons que f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Montrons qu'il existe un réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. On remarque que le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient, on a donc bien f surjective.

On a montré que f est bijective.

Correction 15 Soit $a \in \mathbb{R}$, on cherche à résoudre l'équation $f(x) = a$. On raisonne par équivalence:

$$f(x) = a \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = a \Leftrightarrow 1-x = e^a(1+x) \Leftrightarrow 1-e^a = x(1+e^a).$$

On a $e^a \neq -1$, donc $x = \frac{1-e^a}{1+e^a}$. L'équation a une unique solution donc f est bijective.

Correction 16 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résolvons le système $f(x, y) = (a, b)$:

$$\begin{cases} x-2y = a \\ 2x+3y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = b-2a \\ 7x = 3a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3a+2b}{7} \\ y = \frac{b-2a}{7} \end{cases}.$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le système admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ donc f est bijective.

2. On commence par remarquer que les éléments de Δ s'écrivent $(x, 1-2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (a, b) \in f(\Delta) &\Leftrightarrow \exists (x, y) \in \Delta, f(x, y) = (a, b) \\ &\Leftrightarrow \exists (x, 1-2x) \in \mathbb{R}^2, f(x, 1-2x) = (a, b) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, (5x-2, 3-4x) = (a, b) \end{aligned}$$

Le système

$$\begin{cases} 5x-2 = a \\ 3-4x = b \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} 5x = a+2 \\ 4x = 3-b \end{cases}.$$

Il admet une solution si et seulement si $4(a+2) = 5(3-b)$ ce qui se réécrit $4a+5b=7$.

Par équivalence, on a montré :

$$f(\Delta) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, 4a+5b=7\}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (x, y) \in f^{-1}(\Delta) &\Leftrightarrow f(x, y) \in \Delta \\ &\Leftrightarrow (x-2y, 2x+3y) \in \Delta \\ &\Leftrightarrow 2(x-2y) + (2x+3y) = 1 \\ &\Leftrightarrow 4x-y = 1 \end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré que :

$$f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x-y=1\}.$$

Correction 17 La fonction f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$, elle est injective car $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$. La fonction g est surjective car pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x+1$ est un antécédent par g . En revanche, elle n'est pas injective car $g(0) = g(1) = 0$. Soit $x \in \mathbb{N}^*$, on a $f \circ g(x) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$ et $f \circ g(0) = f(0) = 1$ donc

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{N}$, alors $g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1)-1 = x$ donc $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$.

Remarque. On a $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ mais $f \circ g \neq id_{\mathbb{N}}$ et ni f ni g n'est bijective.

Correction 18 Soit $x \in \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f \circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1-x$ donc $f \circ f(x) = f(1-x)$. Or $1-x \notin \mathbb{Q}$. En effet, si on suppose, par l'absurde, que c'est le cas, alors $1-(1-x) \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. On a donc $f \circ f(x) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$. Donc pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f \circ f(x) = x$. Et donc $f \circ f = id$.

On en déduit que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

Correction 19 Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, résolvons le système $f(n, m) = (a, b)$. On trouve $n = \frac{a+b}{2}$ et $m = \frac{a-b}{2}$. Si a et b ne sont pas de même parité, il n'existe pas de solution dans $\mathbb{Z}$ donc f n'est pas surjective.

En revanche, si un antécédent existe (dans $\mathbb{Z}^2$), il est unique, égal à $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ donc f est injective.

Correction 21 On se donne un élément $a \in \mathbb{R}$ et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = a$ avec $x \neq 2$. On raisonne par équivalence:

$$f(x) = a \Leftrightarrow \frac{3x+5}{x-2} = a \Leftrightarrow 3x+5 = a(x-2) \Leftrightarrow (a-3)x = 5+2a.$$

On voit, ici, que pour $a = 3$, l'équation n'a pas de solution. De plus, si $a \neq 3$, l'équation a une unique solution : $x = \frac{5+2a}{a-3}$. On en déduit que f induit une bijection h de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et l'expression de la bijection réciproque est

$$h^{-1}(x) = \frac{5+2x}{x-3}.$$

Correction 22 1. L'équation $f(x) = y$ est équivalente à l'équation

$$yx^2 - 2x + y = 0.$$

Si $y \neq 0$ et le discriminant est strictement négatif, (par exemple pour $y = 2$), alors l'équation n'a pas de solution réelle donc f n'est pas surjective. Si le discriminant est strictement positif, l'équation a deux racines réelles distinctes donc f n'est pas injective.

2. Si $y = 0$, l'unique solution est $x = 0$, si $y \neq 0$, cette équation d'ordre 2 en x admet des solutions si et seulement si son discriminant $\Delta = 4 - 4y^2$ est positif ou nul donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Ainsi, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution si et seulement si $y \in [-1, 1]$, nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1, 1]$.

3. Soit $y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ alors les solutions possibles de l'équation $g(x) = y$ sont :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y},$$

pour $y \neq 0$ et 0 si $y = 0$. Montrons que la seule solution dans $[-1, 1]$ est $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. On a $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$.

En effet, $0 < \sqrt{1+y^2} < 1$ donc $\frac{1}{2} < \frac{|y|}{1+\sqrt{y^2}} < 1$ puis $\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$. Montrons que l'autre solution n'appartient pas à $[-1, 1]$. Il faut éliminer le cas où $y = \pm 1$ car les deux solutions sont alors égales. Si $y \in]0, 1[$, on a

$$\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} > y - 1$$

et la deuxième inégalité est vraie donc $\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} > 1$.

Si $y \in]-1, 0[$, on a

$$\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} > -y + 1$$

et la deuxième inégalité est vraie donc $\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} < -1$

On a montré que pour tout $y \in [-1, 1]$, l'équation $g(x) = y$ admettait une unique solution dans $[-1, 1]$ donc g est bijective.

4. On a $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $] -1, 1[$ et f est strictement croissante sur $[-1, 1]$. On en déduit que f est injective et $f([-1, 1]) = [-1, 1]$ donc la restriction de $f, g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, est une bijection.

Correction 23 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on étudie l'équation $f(x, y) = (a, b)$. On a donc

$$f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = a \\ \frac{x}{y} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = ab \\ xy = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{ab} \\ y = \sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases}$$

On cherche (x, y) dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ donc (a, b) admet un unique antécédent dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est $(\sqrt{ab}, \sqrt{\frac{a}{b}})$. L'application réciproque est donc $f^{-1} : (x, y) \mapsto (\sqrt{xy}, \sqrt{\frac{x}{y}})$.

Correction 24 Comme on demande l'application réciproque, on va chercher à résoudre l'équation $f(z, z') = (a, b)$ pour un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ donné. On raisonne par équivalence:

$$\begin{cases} 2z + z' = a \\ 3z - z' = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z = a + b \\ 5z' = 3a - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{a+b}{5} \\ z' = \frac{3a-2b}{5} \end{cases}.$$

On a montré que l'équation possède une unique solution, l'application est donc bijective. De plus, l'unique antécédent de (a, b) est $(\frac{a+b}{5}, \frac{3a-2b}{5})$ donc

$$f^{-1} : (z, z') \mapsto \left(\frac{z+z'}{5}, \frac{3z-2z'}{5} \right).$$

Correction 25 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On étudie l'équation $f(x) = a$. On remarque que $|f(x)| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de solution si a n'appartient pas à $] -1, 1[$. Soit maintenant $a \in] -1, 1[$ et cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{1+|x|} = a$.

On remarque que x et a sont de même signe.

- Si $a > 0$, on cherche une solution $x > 0$ et $f(x) = a \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{1-a}$.
- Si $a < 0$, on cherche une solution $x < 0$ et $f(x) = a \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{1+a}$.
- Si $a = 0$, alors $x = 0$.

On a montré que pour tout $a \in] -1, 1[$, l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution, f induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

2. D'après le travail fait à la question précédente, si $y \in]-1, 1[$, l'unique antécédent de y par f est $\frac{y}{1-|y|}$.

Correction 26 1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : Soit $(a, a') \in A^2$ tel que $f(a) = f(a')$, montrons que $a = a'$. On applique g à l'égalité, on obtient $g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. On a montré que f est injective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$, montrons qu'il admet un antécédent par g . Comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$. On a montré que tout élément c de C admet un antécédent par g donc g est surjective.

Correction 27 On note k un antécédent de 0. On a alors $f(k) = 0$. Or, par hypothèse, $f(k) \geq k$ donc $0 \geq k$. Comme k est un entier naturel, on a $k = 0$.

Correction 28 On suppose h^2 bijective alors $h^2 = h \circ h$ est injective et surjective ce qui implique, d'après l'exercice 26, que h est injective et surjective donc bijective.

On suppose maintenant h^n bijective alors $h^n = h \circ h^{n-1}$ est surjective donc h l'est et $h^n = h^{n-1} \circ h$ est injective donc h l'est. On en déduit que h est bijective.

Correction 29 1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $h(a) = h(b)$. On a alors

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$$

donc $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$. Par injectivité de f , on a $a = b$ donc h est injective.

Remarque. *L'injectivité d'une seule des deux fonctions suffit.*

2. C'est faux. En effet, étant donné $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a$ et $x' \in \mathbb{R}$ tel que $g(x') = b$ mais il n'y a aucune raison pour que $x = x'$. Pour se convaincre, on peut considérer la fonction $h : x \mapsto (x, x)$. On a $f = id = g$ et les deux fonctions sont surjectives (et même bijectives), pourtant l'élément $(1, 2)$ n'admet pas d'antécédent par h .

Correction 30 1. Il suffit de considérer l'application qui à x associe le singleton $\{x\}$. Elle est bien définie de E dans $\mathcal{P}(E)$ et $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x = y$ donc elle est injective.

2. Si $A \in \text{Im}(f)$, alors, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = A$. On a alors

- Si $a \in A$, alors par définition de A , $a \notin f(a) = A$ ce qui est absurde.
- Si $a \notin A$, alors, par définition de A , $a \in f(a)$. Or $f(a) = A$, on obtient, à nouveau, une contradiction.

Un tel élément a de E ne peut donc pas exister ce qui montre qu'une application de E dans $\mathcal{P}(E)$ ne peut pas être surjective, il n'existe donc pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Correction 32 Soit $B \in \mathcal{P}(Y)$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset f(X)$ et $\forall c \in f(f^{-1}(B))$, il existe $a \in f^{-1}(B)$, $f(a) = c$ et $f(a) \in B$ puisque $a \in f^{-1}(B)$. On a donc $c \in B$ ce qui montre l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B \cap f(X)$.

Soit maintenant $y \in B \cap f(X)$, alors $y \in f(X)$ donc il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Or, $y \in B$ donc $f(x) \in B$ ce qui est équivalent à $x \in f^{-1}(B)$. On a donc $y \in f(f^{-1}(B))$ ce qui montre l'autre inclusion.

Correction 33 On raisonne par équivalence :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow f(X) = Y$$

$$\Leftrightarrow \forall B \subset Y, B \cap f(X) = B$$

$$\Leftrightarrow \forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B \text{ d'après l'exercice 32}$$

On a donc bien l'équivalence souhaitée.