Devoir surveillé 0.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}$ et $\dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer :
$$\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $(n+2)(U_n - 1) - (2n+2)\left(U_{n+1} - \dfrac{1}{n+1} - 1\right) = -n$.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, une expression simplifiée de U_{n+1} en fonction de n et U_n.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $U_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$.

Exercice 2.

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} u_k$

   (a) Calculer u_4.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n^2 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$.

   En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une relation entre u_n et u_{n-1}^2.

   (c) Déterminer l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $s_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, s_n = \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} s_k\right) + 1$

   (a) Calculer s_3.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \geqslant u_n$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \leqslant 2^{2^n}$.

(d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre s_{n+1} et s_n.

(e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{s_n} = \dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1}$

(f) En déduire la valeur, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$, ainsi que la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{1-e^x} \end{array} \right.$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x) + f(-x) = -1$.

   (b) La fonction f est-elle paire? impaire?

   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = f(x) + f^2(x)$.

   (d) Donner le tableau de variations de la fonction. On donnera les limites aux bords de son ensemble de définition.

   (e) Que vaut l'image de f?

   (f) Tracer le graphe de f.

   (g) f est-elle injective? surjective?

2. (a) Montrer que f induit une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J. On précisera ces deux intervalles.
   On note g la bijection réciproque de $f|_I^J$.

   (b) Sans calculer l'expression de g, montrer que g est dérivable sur J et montrer que

$$\forall x \in J, g'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

3. Peut-on affirmer que $f|^{\mathrm{Im}(f)}$ est bijective?

4. Déterminer une expression de sa bijection réciproque h.

5. Quel lien a-t-on entre g et h?

6. Retrouver, par le calcul, le résultat de la question 2b

Correction du DS n 0

Exercice 1 1. On a

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{\overbrace{(n+1)!}^{=(n+1).n!}\ k!\ (n-k)!}{k!\ \underbrace{(n-k+1)!}_{=(n-k+1).(n-k)!}\ n!} = \boxed{\frac{n+1}{n-k+1}}$$

et

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n!\ k!\ \overbrace{(n-k)!}^{=(n-k).(n-k-1)!}}{\underbrace{(k+1)!}_{=(k+1).k!}\ (n-k+1)!\ n!} = \boxed{\frac{n-k}{k+1}}$$

2. La question précédente permet d'exprimer $\binom{n}{k+1}$ et $\binom{n+1}{k}$ en fonction de $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k}$$

On a donc d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} &= \frac{k+1}{\binom{n}{k}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{2k-n}{\binom{n}{k}}\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{k}}\left((n+2) - (2n+2)\frac{n-k+1}{n+1}\right) \\ &= \frac{n+2-2(n-k+1)}{\binom{n}{k}} \\ &= \frac{2k-n}{\binom{n}{k}}\end{aligned}$$

Les deux quantités sont donc bien égales.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On sait que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}$$

On somme ces égalités pour k variant de 0 à $n-1$:

$$(n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{k}}-(2n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right)$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{k}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}-1=U_n-1$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}}-\frac{1}{n+1}-1=U_{n+1}-1-\frac{1}{n+1}$$

on a donc

$$(n+2)\left(U_n-1\right)-(2n+2)\left(U_{n+1}-1-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-(k+1)-1}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right)$$

On reconnaît une somme télescopique dans le membre de droite, d'où :

$$(n+2)\left(U_n-1\right)-(2n+2)\left(U_{n+1}-1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{\binom{n}{n}}-\frac{n+1}{\binom{n}{0}}=-n$$

On a bien l'égalité souhaitée.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On a

$$(n+2)\left(U_n-1\right)-(2n+2)\left(U_{n+1}-1-\frac{1}{n+1}\right)=-n$$

donc

$$(2n+2)\left(U_{n+1}-1-\frac{1}{n+1}\right)=(n+2)\left(U_n-1\right)+n,$$

puis

$$U_{n+1}-1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{2n+2}\left(U_n-1\right)+\frac{n}{2n+2},$$

et enfin

$$U_{n+1}=1+\frac{1}{n+1}+\frac{n+2}{2n+2}\left(U_n-1\right)+\frac{n}{2n+2}=\boxed{\frac{n+2}{2n+2}U_n+1}$$

5. Nous allons montrer l'égalité par récurrence. Pour tout $n\geqslant 1$, on pose :

$$\mathcal{H}(n)\ :\ \text{“}\ U_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}\ \text{”}$$

- Initialisation : $U_1 = \dfrac{1}{\binom{1}{0}} + \dfrac{1}{\binom{1}{1}} = 1 + 1 = 2$ et

$$\frac{2}{4}\sum_{k=1}^{2} \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2^2}{2}\right) = 2$$

donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \geqslant 1$. On suppose $\mathcal{H}(n)$. On a alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \left(\frac{n+2}{2n+2}.U_n\right) + 1 \\ &= \frac{n+2}{2n+2}.\frac{n+1}{2^{n+1}}.\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k} + 1 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k} + 1 \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+2}}{n+2}\right) \\ &= \frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{2^k}{k} \end{aligned}$$

Cela démontre $\mathcal{H}(n+1)$.

- Conclusion : $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Exercice 2 1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = \prod_{k=0}^{n-1} u_k$$

(a) On a $u_0 = 2$, $u_1 = u_0 = 2$, $u_2 = u_0u_1 = 4$, $u_3 = u_0u_1u_2 = 2^4$ et $u_4 = 2^8$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors

$$u_n^2 = u_n\prod_{k=0}^{n-1} u_k = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

On en déduit que $u_n^2 = u_{n+1}$ donc $u_n = u_{n-1}^2$ pour tout $n \geqslant 2$.
BEAUCOUP d'entre vous sont partis avec une récurrence et n'utilise nulle part le fait que P_n soit vraie pour montrer que P_{n+1} l'est. Ce n'est donc PAS un raisonnement par récurrence .

(c) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $u_n = 2^{2^{n-1}}$. On a $u_1 = 2 = 2^{2^0}$ donc la formule est vraie au rang 1. On suppose qu'il existe un entier n tel que $u_n = 2^{2^{n-1}}$, montrons que $u_{n+1} = 2^{2^n}$. On sait que $u_{n+1} = u_n^2$, on a donc, par hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 = 2^{2^{n-1}\times 2} = 2^{2^n}.$$

La formule est vraie au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = 2^{2^{n-1}}$. La formule est fausse pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$.
Lorsque vous intuitez une formule, vérifiez-la sur les premiers termes et surtout, ne la balancez pas sans preuve ! On n'affirme rien sans le justifier. Jamais.

2. On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$s_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, s_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} s_k\right) + 1$$

(a) On a $s_1 = s_0 + 1 = 3$, $s_2 = s_0 s_1 + 1 = 7$ et $s_3 = 42 + 1 = 43$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que $s_n \geqslant u_n$.
On le montre par récurrence forte sur n. Le résultat est vrai pour $n = 0$.
On suppose qu'il est vrai pour tout $k \leqslant n$, montrons que $s_{n+1} \geqslant u_{n+1}$. On a $s_k \geqslant u_k \geqslant 0$ pour tout $k \leqslant n$ donc $\prod_{k=0}^{n} s_k \geqslant \prod_{k=0}^{n} u_k$ puisque tout est positif. On a donc

$$s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k \geqslant \prod_{k=0}^{n} s_k \geqslant \prod_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}.$$

Le résultat est vrai au rang $n+1$. Par le principe de récurrence forte, il est vrai pour tout entier n.

(c) Montrons, par récurrence forte sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \leqslant 2^{2^n}$. Le résultat est vrai pour $n = 0$, on suppose qu'il existe un entier n tel que $s_k \leqslant 2^{2^k}$ est vrai pour tout $k \leqslant n$, on a alors, comme $s_k \geqslant 0$,

$$s_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} s_k + 1 \leqslant \prod_{k=0}^{n} 2^{2^k} + 1.$$

On a :

$$\prod_{k=0}^{n} 2^{2^k} = 2^{\sum_{k=0}^{n} 2^k} = 2^{2^{n+1}-1} = \frac{1}{2} 2^{2^{n+1}},$$

et $1 \leqslant \frac{1}{2} 2^{2^{2^n}}$ donc

$$s_{n+1} \leqslant 2^{2^{n+1}}.$$

Le résultat est vrai au rang $n+1$, par le principe de récurrence, il est vrai pour tout entier n.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$s_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} s_k + 1 = s_n \prod_{k=0}^{n-1} s_k + 1 = s_n(s_n - 1) + 1 = s_n^2 - s_n + 1.$$

(e) D'après la question précédente, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} - 1 = s_n^2 - s_n$.
Il est clair que $u_n \geqslant 2$ pour tout n donc $s_n \geqslant 2$ pour tout n donc $s_n \neq 0, 1$. On peut donc prendre l'inverse de l'égalité précédente, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{s_{n+1} - 1} = \frac{1}{s_n^2 - s_n} = \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_n},$$

puis

$$\frac{1}{s_n} = \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$$

On ne divise pas sans s'être assuré que la quantité ne s'annule pas, on ne prend donc pas l'inverse sans être prudent !

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\frac{1}{s_k} = \frac{1}{s_k - 1} - \frac{1}{s_{k+1} - 1}$$

donc, en sommant pour k variant de 0 à n, on obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k - 1} - \frac{1}{s_{k+1} - 1} = \frac{1}{s_0 - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1},$$

car on reconnait une somme télescopique. On a donc

$$S_n = 1 - \frac{1}{s_{n+1} - 1}.$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \geqslant u_n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

Exercice 3 1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, alors

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{e^x}{1 - e^x} + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \\ &= \frac{e^x}{1 - e^x} + \frac{1}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^x - 1}{1 - e^x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'égalité souhaitée.
Vous avez remarqué que je commence ma réponse par "Soit $x \in \ldots$ "

(b) Au vu de l'égalité montrée à la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x) + f(-x) \neq 0$ donc f n'est pas impaire (ou bien $f(0) \neq 0$). Par ailleurs, $f(x) = f(-x) \Leftrightarrow 2f(x) = -1$ ce qui est faux car f n'est pas constante donc la fonction n'est pas paire.

(c) On a, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x(1 - e^x) + e^{2x}}{(1 - e^x)^2} = \frac{e^x}{1 - e^x} + \frac{e^{2x}}{(1 - e^x)^2} = f(x) + f^2(x)$$

On a bien l'égalité souhaitée.

(d) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1 - e^x)^2}$ donc $f'(x) > 0$. On a

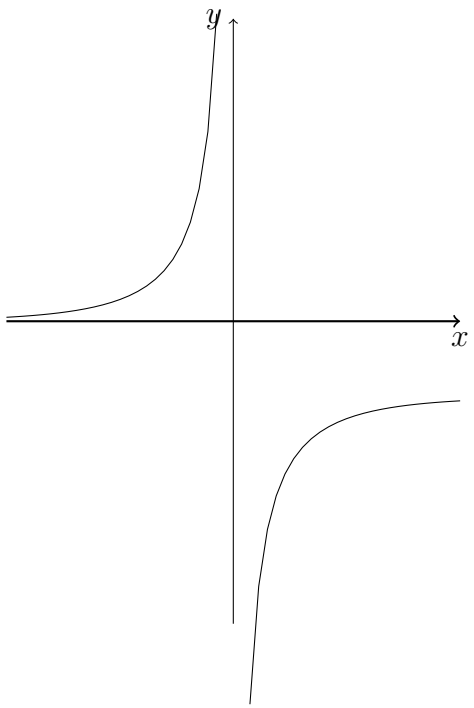
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{-x} - 1} = -1$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$		
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\quad -\infty$	$\nearrow$	-1

(e) D'après le tableau de variations, on a $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

(f) On a la figure suivante :



(g) Piège : f n'est pas strictement croissante! en effet, on a $f(-1) > f(1)$. Pour justifier de son injectivité, on peut dire que toute droite horizontale ne coupe le graphe qu'en un point maximum. Ou bien dire qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$ ET $f(\mathbb{R}_+^\star) \cap f(\mathbb{R}_-^\star) = \emptyset$ donc elle est bien injective.

Elle n'est pas surjective car -1 n'appartient pas à l'image donc n'admet pas d'antécédent.

2. La fonction f est injective sur $I = \mathbb{R}_+^\star$ et $f(I) =]-\infty, -1[$ donc f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $]-\infty, -1[$.
$]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle !!!

3. On va appliquer la formule donnant la dérivée de la réciproque. Comme la dérivée de f ne s'annule pas, g est dérivable et

$$\forall x \in]-\infty, -1[, g^{-1}(x) = \frac{1}{f' \circ g(x)}.$$

Or $f'(x) = f(x) + f^2(x)$ et $f \circ g(x) = x$, on obtient donc

$$\forall x < -1, g^{-1}(x) = \frac{1}{x + x^2},$$

et on retrouve bien la formule donnée dans l'énoncé.
BEAUCOUP m'ont dit que g était dérivable car f l'était ce qui est très faux. Pensez à cos qui est dérivable partout et arccos ne l'est pas aux bornes de son intervalle de définition.
Par ailleurs, j'ai vu beaucoup de f^{-1} donc vos copies ce qui n'a aucun sens étant donné que f n'est pas bijective (et c'est sans doute pourquoi on s'embête à donner des noms à ces réciproques !!).
Enfin, certains "redémontrent" la formule de la dérivée. Alors d'abord c'est une formule du cours que vous devez connaître par cIJur donc il n'est pas nécessaire de la montrer et surtout, écrire $f^{-1} \circ f(x) = x$ puis dériver n'est pas une preuve !!!!!! en tout cas, c'est la preuve de la

formule en admettant la dérivabilité de la fonction, c'est donc assez incomplet comme preuve. C'est très utile pour retrouver la formule si vous l'avez oublié mais je ne veux pas voir ça sur vos copies.

4. La fonction f est injective, corestreinte à son image, elle est bijective.

5. Soit $a \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty$, on résout $f(x)=a$. On a

$$\begin{aligned} f(x)=a &\Leftrightarrow \frac{e^x}{1-e^x}=a \\ &\Leftrightarrow e^x=a(1-e^x) \\ &\Leftrightarrow (1+a)e^x=a \\ &\Leftrightarrow e^x=\frac{a}{a+1} \text{ car } a\neq -1 \\ &\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) \text{ car } a(a+1)>0 \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$, $h(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.
   Je vous rappelle que vous devez systématiquement justifier les étapes notamment quand vous divisez ou quand vous appliquez le ln.
   Certains ont voulu scinder le ln en deux mais il faut alors penser aux valeurs absolues !

6. On a $h|_{]-\infty,-1[}=g$.

7. On dérive h, on obtient :

$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[, h'(x)=\frac{\frac{(x+1)-x}{(1+x)^2}}{\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{x(x+1)}$$

   On retrouve bien la même expression de la dérivée.