Devoir surveillé 2.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.
On considère la fonction $h(x) = e^x - x$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. (a) Donner un équivalent de h en $0, +\infty$ et $-\infty$.
   (b) Donner un équivalent de $h(x) - 1$ en 0.
2. Étudier la fonction h. On dressera son tableau de variations en précisant ses limites et valeurs particulières puis l'allure de h.
3. Déduire de la question précédente que pour tout réel x non-nul, il existe un unique réel non-nul y différent de x tel que $h(x) = h(y)$.

Dans toute la suite, on note $f(x)$ cet unique réel. On définit ainsi une fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^\star$ qui à x associe $f(x)$.

4. (a) Pour x un réel non nul, expliquer comment tracer le point du graphe de f d'abscisse x à partir du graphe de h.
   (b) Déduire de l'étude de h que $(x < x') \Rightarrow (f(x) > f(x'))$. On différenciera trois cas: $x < 0 < x'$, $0 < x < x'$ et $x < x' < 0$. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}^\star$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a $f(f(x)) = x$. En déduire que f est bijective. On précisera sa réciproque f^{-1}. Que peut-on en déduire sur le graphe de f?
5. On veut retrouver les résultats de la question précédente avec des bijections induites.
   (a) Montrer que h induit deux bijections $\varphi : I_1 \to J_1$ et $\psi : I_2 \to J_2$ avec $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}^\star$ et $I_1 \subset \mathbb{R}^+$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, exprimer $f(x)$ à l'aide de $\varphi, \psi, \varphi^{-1}$ et ψ^{-1}.
   (c) En déduire les variations de f.
   (d) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f \circ f(x) = x$.

On admet que pour tout réel x positif, on a $e^x - e^{-x} \geqslant 2x$.

6. Montrer que pour tout réel x positif, $h(-x) \leqslant h(x)$. En déduire que $f(x) \leqslant -x, \forall x \in \mathbb{R}_+^\star$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x) + h(x) = e^{f(x)}$. En déduire la limite de la fonction $f + h$ en $+\infty$.
8. En tenant compte de tous les renseignements obtenus tracer le graphe de f.

Exercice 2.

Des inégalités

Vous admettrez les trois résultats suivants :

- $\forall t > -1, \quad \ln(1+t) \leqslant t,$
- **L'inégalité arithmético-géométrique :** pour tout entier n non nul et tous réels strictement positifs $y_1, \ldots, y_n$: $\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.$
- $\forall t \in [0,1], e^t \leqslant 1+2t \qquad (\sharp)$

Notations

- Soit n un entier naturel non nul et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs.

  On pose : $\forall k \in [\![1,n]\!], u_k = \left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k}.$

- Nous noterons aussi pour tout entier naturel k non nul : $b_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$

On dit d'un réel C qu'il vérifie la propriété (*) lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n, \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant C \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Partie I : e vérifie $*$

1. (a) Exprimez, pour tout entier naturel k non nul, $\prod_{j=1}^{k} b_j$ sans produit.

   (b) Exprimez, pour j dans $[\![1,n]\!]$, $\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ sans somme.

   (c) Vérifiez que $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e.$

2. (a) Vérifiez, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à $y_j = b_j x_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], u_k \leqslant \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j x_j$$

   (b) Déduisez-en, en intervertissant deux sommes, que $\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j x_j}{j}.$

   (c) Montrez que e vérifie (*).

Partie II : plus petit réel C vérifiant (*)

Soit C un réel qui vérifie la propriété (*).

3. Soit q un réel de $]0,1[$ et $x_k = q^{k-1}$ pour tout entier naturel non nul k.
   (a) Vérifiez que $\forall k \in \mathbb{N}^\star, u_k = q^{\frac{k-1}{2}}$.
   (b) Calculez une expression sans somme et produit des deux sommes suivantes: $\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (c) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, C \geqslant (1+q^{1/2})\dfrac{1-q^{n/2}}{1-q^n}$.
   (d) Déduisez-en, grâce à un passage à la limite, que $\forall q \in [0,1[, C \geqslant 1+q^{1/2}$.
   (e) Conclure que $C \geqslant 2$.
4. Prenons $x_k = 1/b_k$ pour tout entier naturel non nul k.
   (a) Vérifiez que $u_k = \dfrac{1}{k+1}$ pour tout entier naturel non nul k.
   (b) Vérifiez que $\forall j \in \mathbb{N}^\star, \dfrac{1}{j} \geqslant \ln(j+1) - \ln(j)$.
   (c) Déduisez de ces deux questions sans récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \ln(n+2) - \ln 2$$
   (d) Vérifiez en prenant le ln, que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^\star, ekx_k \leqslant e^{\frac{1}{k+1}}$$
   (e) En déduire, à l'aide de l'inégalité (♯) et de la question **I-1.b)**, que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, e\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   (f) Vérifiez que :
   $$\forall k \geqslant 2, \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$
   Déduisez-en une expression d'une suite $(\alpha_n)_n$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \alpha_n$$
   (g) Montrez enfin que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, C \geqslant e\frac{\ln(n) - \ln(2)}{\ln(n)+3}$$
   (h) Déduisez-en que $C \geqslant e$.
5. Que peut-on conclure à l'issue de ces deux parties?

Correction du DS n 2

⚠ $f(x)$ n'est ni croissante, ni injective, ni dérivable puisque c'est un réel !!!
Attention aussi aux égalités fonction=réel qui n'ont aucun sens.

Exercice 1 1. (a) Donner un équivalent de h en $0, +\infty$ et $-\infty$.

- On a $\lim\limits_{x\to 0} = 1$ donc $h(x) \sim_0 1$.
- On a $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{h(x)}{-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} 1 - \frac{e^x}{x} = 1$ donc $h(x) \sim_{-\infty} -x$.
- On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \frac{x}{e^x} = 1$ par croissance comparée donc $h(x) \sim_{+\infty} e^x$.

Les équivalents en 0 de la forme $1+x$, $1+\dfrac{x^2}{2}$ sont corrects (mais ils n'apportent pas plus d'information que le fait que la limite vaut 1.

⚠ $f(x) \sim x+1$ ne donne aucun équivalent de $f(x)-1$ (ou $f(x)-x$).

(b) Donner un équivalent de $h(x)-1$ en 0.

On a $h(x) - 1 = e^x - x - 1 = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $e^x \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$.

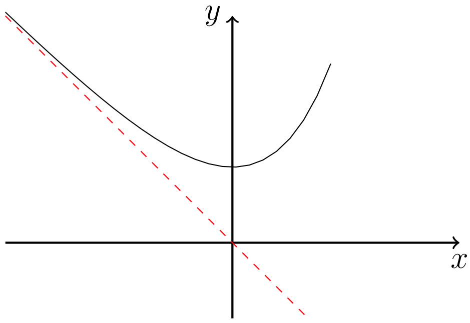
2. Étudier la fonction h. On dressera son tableau de variations en précisant ses limites et valeurs particulières ainsi qu'une allure de son graphe.

La fonction h est dérivable comme somme de fonctions dérivables et sa dérivée vaut $h'(x) = e^x - 1$. Sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ par croissances comparées (en factorisation par e^x) et $+\infty$ en $-\infty$. On peut bien sûr aussi dire que les limites sont les limites des équivalents trouvés en question 1.

On en déduit le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On peut également remarquer que $h(x)+x$ tend vers 0 en $-\infty$, par conséquent le graphe de h admet la droite $y=-x$ pour asymptote en $-\infty$. On remarque que h n'est ni paire ni impaire, le graphe de f n'admet donc a priori aucune symétrie. Le graphe de h est donc:



3. Déduire de la question précédente que pour tout réel x non-nul, il existe un unique réel non-nul y différent de x tel que $h(x) = h(y)$.

Soit x un réel non-nul, alors $h(x) > 1$. D'après ce qui précède, on sait que $h|_{\mathbb{R}^{-\star}}^{]1,+\infty[}$ est bijective et $f(x) \in]1, +\infty[$, il existe donc un unique $y_1 \in \mathbb{R}^{-\star}$ tel que $h(y_1) = h(x)$. De même, $h|_{\mathbb{R}^{+\star}}^{]1,+\infty[}$ est bijective il existe donc un unique $y_2 \in \mathbb{R}^{+\star}$ tel que $h(y_2) = h(x)$. On a donc exactement deux solutions distinctes à l'équation $h(x) = h(y)$ d'inconnue y. Il est clair que x est une des solutions, par conséquent:

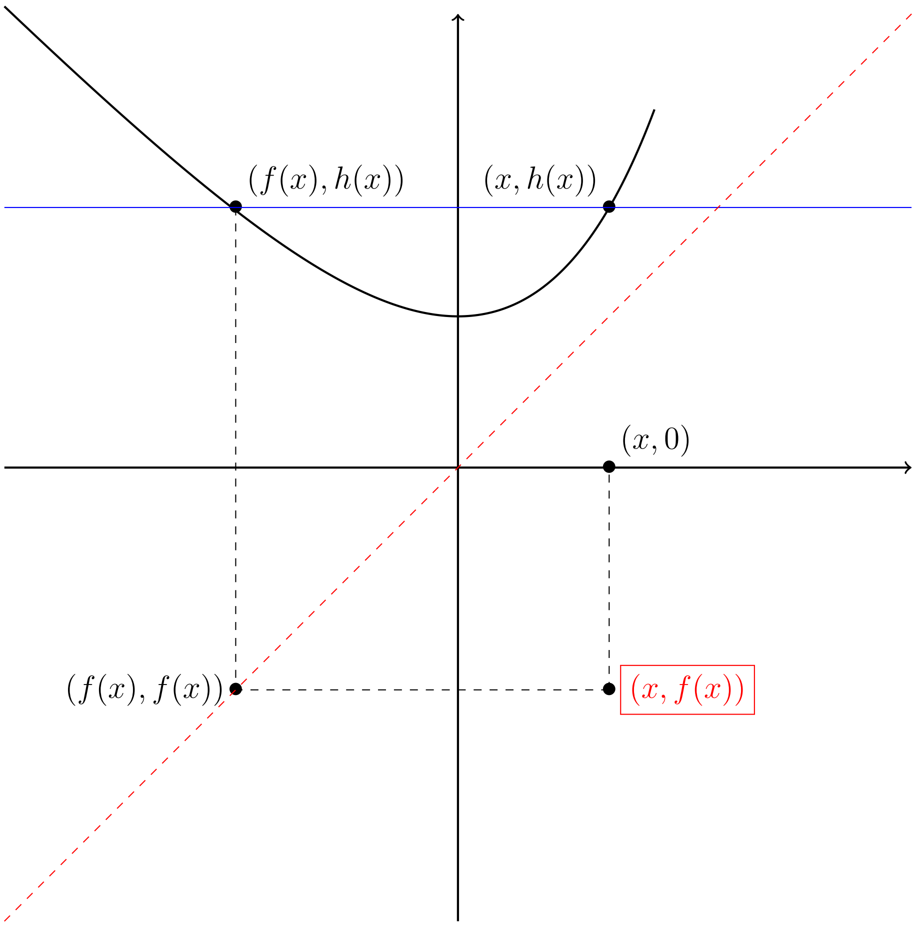
$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ non-nul, il existe un unique } y \text{ non-nul distinct de } x \text{ tel que } h(x) = h(y)}$$

Dans toute la suite, on note $f(x)$ cet unique réel. On définit ainsi une fonction $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^\star$ qui à x associe $f(x)$.

Beaucoup ont compris pourquoi mais ont eu beaucoup de mal à l'expliquer! Dire que tout élément de $]1, +\infty[$ admet exactement deux antécédents ne suffit pas, il faut préciser que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $h(x)$ est justement un élément de cet intervalle qui aura donc deux antécédents (dont x) et donc exactement un antécédent différent de x.

4. (a) Expliquer comment tracer le point du graphe de f d'abscisse x, un réel non nul, à partir du graphe de h.

Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, alors $h(x)$ est l'ordonnée du point du graphe de h d'abscisse x. La droite $y = h(x)$ intersecte le graphe de f en un autre point d'abscisse $f(x)$. Reste à placer $f(x)$ sur l'axe des abscisses. Pour cela, on utilise la première bissectrice.



Relisez vous !!! on remonte jusqu'à, on envoie sur, le point de h. Tout cela n'a pas sa place dans une copie de maths! Beaucoup se sont arrêtés une fois trouvé $f(x)$ sur l'axe des abscisses, on vous demandait le point $(x, f(x))$

(b) Déduire de l'étude de h que $(x < x') \Rightarrow (f(x) > f(x'))$. On différenciera trois cas: $0 < x < x'$, $x < 0 < x'$ et $x < x' < 0$. En déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}^\star$.

Dans un premier temps, on remarque que par définition de f, pour tout réel x on a $h(f(x)) = h(x)$. De plus, si x est strictement positif, alors $f(x)$ est strictement négatif et réciproquement, si $x < 0$ alors $f(x) > 0$. En effet, en vertu de ce qui précède, pour tout réel x, les deux solutions de l'équation $h(y) = h(x)$ (qui sont par définition x et $f(x)$), sont l'une strictement négative et l'autre strictement positive. En particulier, elles sont de signe opposé. On en déduit donc dans un premier temps que si $x < 0 < x'$, alors $f(x) > 0 > f(x')$ et en particulier,

$$\forall x < 0 < x',\ f(x) > f(x')$$

Soient maintenant x et x' deux réels tels que $0 < x < x'$. Alors $f(x)$ et $f(x')$ sont strictement négatifs. De plus, h étant croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on a $h(x) \leqslant h(x')$ donc $h(f(x)) \leqslant h(f(x'))$. Or, h étant décroissante sur $\mathbb{R}^{-\star}$, on a $f(x') \leqslant f(x)$.

De la même manière, on montre que si $x < x' < 0$, alors $f(x) > f(x')$. On en déduit notamment que

$$\boxed{\text{La fonction f est une fonction strictement décroissante sur } \mathbb{R}^\star.}$$

Là encore, beaucoup de " on voit que c'est plus proche de 0". Utilisez des outils mathématiques, ici le sens de variations de h

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a $f(f(x)) = x$.

Soit x un réel. Par définition, $f(f(x))$ est l'unique réel y différent de $f(x)$ tel que $h(y) = h(f(x))$. Or on sait que $h(f(x)) = h(x)$ et $f(x) \neq x$ donc nécessairement $y = f(x)$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(f(x)) = x}$$

Dire que $f \circ f(x)$ est un antécédent de $h(x)$ mais il faut préciser aussi qu'il est différent de $f(x)$ pour être sûr qu'il est égal à x. En déduire que f est bijective. On précisera sa réciproque f^{-1}. Que peut-on en déduire sur le graphe de f?

On peut utiliser le résultat du cours: il existe une fonction qui composée à droite et à gauche de f donne l'identité, f est donc bijective et sa bijection réciproque est cette fonction (ici f) donc $f^{-1} = f$.

Attention à ne jamais parler de f^{-1} sans savoir que f est bijective! Le fait que $f \circ f^{-1} = id$ lorsque f est bijective n'a aucun intérêt ici puisque l'on vous demande précisément de montrer que f est bijective.

Comme le graphe de f et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice, on en déduit que

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ est symétrique par rapport à la première bissectrice}}$$

5. On veut retrouver les résultats de la question précédente avec des bijections induites.

   (a) La fonction h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc injective et $h(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$. Elle induit donc une bijection $\varphi = h|_{]0,+\infty[}^{]1,+\infty[}$.

   De même, h est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ donc injective et $h(]-\infty, 0[) =]1, +\infty[$ donc elle induit une bijection $\psi = h|_{]-\infty,0[}^{]1,+\infty[}$. On a bien $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}^\star$ et φ définie sur un sous-intervalle de $\mathbb{R}^+$.

   J'ai vu beaucoup de " et prend ses valeurs dans" ce qui est très imprécis ! ça ne donne qu'une inclusion. Attention aussi à ne pas simplement dire que $\mathrm{Im}(h) = [1, +\infty[$, cela ne garantit pas que la corestriction soit surjective (il faut restreindre la corestriction à son image à elle, qui peut être différente de celle de h. Enfin, on évite les notations hybrides qui n'ont pas de sens du style $Im(]0, +\infty[)$

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a $h(f(x)) = h(x)$ donc

   - Si $x > 0$, $f(x) < 0$, on a donc $\varphi(x) = \psi(f(x))$ ce qui est équivalent à $f(x) = \psi^{-1}\circ\varphi(x)$.
   - Si $x < 0$, $f(x) > 0$, on a donc $\psi(x) = \varphi(f(x))$ ce qui est équivalent à $f(x) = \varphi^{-1}\circ\psi(x)$.

   Au final, on a

   $$f(x) = \begin{cases} \psi^{-1} \circ \varphi(x) \text{ si } x > 0 \\ \varphi^{-1} \circ \psi(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

   (c) Soit $x < y$, on a trois cas possibles:

   - Si $x < 0 < y$, dans ce cas $f(x) > 0$ et $f(y) < 0$, on a donc $f(y) < 0 < f(x)$.
   - Si $0 < x < y$, alors $f(x) < f(y)$ car $\psi^{-1} \circ \varphi$ est strictement décroissante en tant que composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante.
   - Si $x < y < 0$, alors $f(x) < f(y)$ car $\varphi^{-1} \circ \psi$ est strictement décroissante en tant que composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante.

   Dans tous les cas, on a $f(x) \geqslant f(y)$ donc f est strictement décroissante.

   (d) Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. On raisonne par disjonction de cas.

   - Si $x > 0$, alors $f(x) = \psi^{-1} \circ \varphi(x)$ et $f(x) < 0$ donc $f(f(x)) = \varphi^{-1} \circ \psi(f(x))$. On a donc $f \circ f(x) = \varphi^{-1} \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi(x) = x$.
   - Si $x < 0$, alors $f(x) = \varphi^{-1} \circ \psi(x)$ et $f(x) > 0$ donc $f(f(x)) = \psi^{-1} \circ \varphi(f(x))$. On a donc $f \circ f(x) = \psi^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi(x) = x$.

Dans les deux cas, on a $f \circ f(x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.

On admet que pour tout réel x positif, on a $e^x - e^{-x} \geqslant 2x$.

6. Montrer que pour tout réel x positif, $h(-x) \leqslant h(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^s tar$, alors $e^x - e^{-x} \geqslant 2x \Leftrightarrow e^x - x \geqslant e^{-x} - (-x) \Leftrightarrow h(x) \geqslant h(-x)$. On a donc bien $h(-x) \leqslant h(x)$.

On en déduit, comme $h(f(x)) = h(x)$, que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$h(f(x)) \geqslant h(-x),$$

Par ailleurs, on sait que x et $f(x)$ sont de signes opposés, donc pour tout $x > 0$, $f(x) < 0$ et $-x < 0$. Comme h est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on en déduit que $\forall x > 0, f(x) \leqslant -x$.

En passant à la limite en $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

7. Montrer que pour tout réel x, $f(x) + h(x) = e^{f(x)}$. En déduire la limite de la fonction $f + h$ en $+\infty$. Comment cela se traduit-il en termes de graphe de f et de h?

Par définition de $f(x)$, on a $h(x) = h(f(x)) = e^{f(x)} - f(x)$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) + h(x) = e^{f(x)}}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + h(x) = 0$. En terme de graphes, cela signifie que la distance entre le graphe de f et celui de $-h$ tend vers 0 en $+\infty$. On dit qu'ils sont asymptotiques. Comme le graphe de $-h$ est le symétrique de celui de h par rapport à l'axe des abscisses, cela nous donne l'allure du graphe de f au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ est asymptotique au symétrique par rapport à l'axe } (0_x) \text{ du graphe de } h}$$

8. En tenant compte de tous les renseignements obtenus (décroissance, symétrie, prolongement,limites), tracer le graphe de f.

On sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}^\star$ et qu'elle se prolonge en posant $f(0) = 0$. Par ailleurs, lorsque x tend vers 0, alors $h(x)$ tend vers 1 et l'unique réel non-nul distinct de x tel que $h(x) = h(y)$ tend également vers 0 donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. On sait que le graphe de $-h$ est asymptote en $+\infty$ à f et le graphe de f est en -dessous de la droite $y = -x$.. On obtient l'allure de f sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit le graphe de f par symétrie par rapport à la première bissectrice.
Je ne sais pas (encore) la tracer avec Latex mais j'y travaille :-)

Exercice 2 Deux inégalités

Vous admettrez les deux résultats suivants :

- $\forall t > -1, \quad \ln(1 + t) \leqslant t$,
- **L'inégalité arithmético-géométrique :** pour tout entier n non nul et tous réels strictement positifs $y_1, \ldots, y_n$: $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} y_k\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$.

Notations

- Soit n un entier naturel non nul et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs.

  On pose : $\forall k \in [\![1,n]\!], u_k = \left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k}$.

- Nous noterons aussi pour tout entier naturel k non nul : $b_k = \dfrac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$

On dit d'un réel C qu'il vérifie la propriété (*) lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n, \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant C \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\boxed{\textbf{Partie I : } e \textbf{ vérifie } *}$

1. (a) *Exprimez, pour tout entier naturel k non nul, $\prod_{j=1}^{k} b_j$ sans produit.*

   On a, si l'on pose $a_j = j^{j-1}$ et par produit télescopique :

$$\prod_{j=1}^{k} b_j = \prod_{j=1}^{k} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{a_{k+1}}{a_1} = \frac{(k+1)^k}{1^0} = (k+1)^k$$

   Beaucoup d'erreurs sur ce produit. Si $a_j = j^j$, alors $a_{j+1} = (j+1)^{j+1}$.

   (b) *Exprimez, pour j dans $[\![1,n]\!]$, $\sum_{k=j}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ sans somme.*

   On écrit $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, on reconnaît alors une somme télescopique d'où

$$\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}$$

   (c) *Vérifiez que $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k \leqslant e$.*

   On applique l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ à $t = \frac{1}{k}$. On a alors

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \text{ donc } k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant 1 \text{ donc } \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e$$

   La dernière implication provenant du fait que la fonction exponentielle est croissante.

2. (a) *Vérifiez, en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à $y_j = b_j x_j$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, que :*

$$\forall k \in [\![1,n]\!], u_k \leqslant \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j x_j$$

   Comme conseillé, on applique l'inégalité arithmético-géométrique à $y_j = b_j x_j$:

$$\left(\prod_{j=1}^{k} b_j x_j\right)^{1/k} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} b_j x_j$$

Or

$$\left(\prod_{j=1}^{k} b_j x_j\right)^{1/k} = \left(\prod_{j=1}^{k} b_j\right)^{1/k}\left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k} = u_k\left(\prod_{j=1}^{k} b_j\right)^{1/k} = u_k\left((k+1)^k\right)^{1/k} = u_k(k+1)$$

en utilisant la question 1a. On a donc

$$(k+1)u_k \leqslant \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} b_j x_j$$

d'où le résultat souhaité en multipliant l'inégalité par $\dfrac{1}{(k+1)}$ qui est positif.

(b) *Déduisez-en, avec une interversion de sommes,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j x_j}{j}$.

D'après la question précédente, on sait que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $u_k \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}\sum_{j=1}^{k} b_j x_j$. On somme toutes ces inégalités pour k variant de 1 à n, on obtient:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\sum_{j=1}^{k} b_j x_j\right)$$

or

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\sum_{j=1}^{k} b_j x_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{k(k+1)} b_j x_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} b_j x_j\right) \quad \text{en permutant les deux signes somme}\\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j x_j\left(\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right) \quad \text{car } b_j x_j \text{ ne dépend pas de } k\\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j x_j\left(\tfrac{1}{j} - \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{en utilisant la question 1b)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j x_j}{j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j x_j}{n+1}\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j x_j}{j} \quad \text{car la deuxième somme est positive puisque tous ses termes le sont}
\end{aligned}$$

(c) *Montrez que e vérifie (*).*

Il suffit de remarquer que $\dfrac{b_j}{j} = \dfrac{(j+1)^j}{j^j} = \left(1+\frac{1}{j}\right)^j \leqslant e$ d'après la question 1c). On a donc, en multipliant par x_j qui est positif et en sommant les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j x_j}{j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} e.x_j \leqslant e\sum_{j=1}^{n} x_j$$

et j étant une variable muette, on a bien

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant e \sum_{k=1}^{n} x_k$$

donc e vérifie (*).

Partie II : plus petit réel C vérifiant (*)

Soit C un réel qui vérifie la propriété (*).

3. *Soit q un réel de $]0,1[$ et $x_k = q^{k-1}$ pour tout entier naturel non nul k.*

   (a) *Vérifiez que $\forall k \in \mathbb{N}^\star, u_k = q^{\frac{k-1}{2}}$.*

   On a

$$u_k = \left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k} = \left(\prod_{j=1}^{k} q^{j-1}\right)^{1/k} = \left(q^{\sum\limits_{j=1}^{k}(j-1)}\right)^{1/k}$$

   Or $\sum\limits_{j=1}^{k}(j-1) = \left(\sum\limits_{j=1}^{k} j\right) - k = \dfrac{k(k+1)}{2} - k = \dfrac{k(k-1)}{2}$ donc

$$u_k = \left(q^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)^{1/k} = q^{\frac{k-1}{2}}$$

   (b) *Calculez une expression sans somme et produit des deux sommes suivantes: $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.*

   La somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1}$ est une somme géométrique à n termes, de raison q et de premier terme 1 donc $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

   Visiblement, ça vous a perturbé que la puissance soit $k-1$ et pas k. Pourtant, pour calculer la somme des termes d'une suite géométrique, vous n'avez besoin que de sa raison (q) et de son premier terme (1)

   De même, la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} q^{\frac{k-1}{2}}$ est également une somme géométrique à n termes, de raison $q^{1/2}$ et de premier terme 1 donc $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1-q^{n/2}}{1-q^{1/2}}$.

   Beaucoup de bêtises sur celle-là, notamment des changement d'indice avec des indices obtenus qui ne sont pas entiers !!!

   Astuce: avec la question d'après, vous auriez pu deviner la formule attendue pour cette somme et ça vous aurait mis sur la voie d'une suite géométrique de raison $\sqrt{q}$

(c) *Montrez que* $\forall n \in \mathbb{N}^\star, C \geqslant (1+q^{1/2})\dfrac{1-q^{n/2}}{1-q^n}$.

On sait, par hypothèse, que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant C \sum_{k=1}^{n} x_k$$

soit, en utilisant les expressions trouvées à la question précédente:

$$\frac{1-q^{n/2}}{1-q^{1/2}} \leqslant C\frac{1-q^n}{1-q}$$

ce qui implique

$$C \geqslant \frac{1-q^{n/2}}{1-q^{1/2}}\frac{1-q}{1-q^n}$$

car on multiplie par une quantité positive.

On remarque maintenant que

$$\frac{1-q^{n/2}}{1-q^{1/2}}\frac{1-q}{1-q^n} = \frac{1-q}{1-q^{1/2}}\frac{1-q^{n/2}}{1-q^n} = (1+q^{1/2}).\frac{1-q^{n/2}}{1-q^n}$$

car $(1-q) = (1-q^{1/2})(1+q^{1/2})$.

On a donc bien $C \geqslant (1+q^{1/2})\dfrac{1-q^{n/2}}{1-q^n}$

(d) *Déduisez-en que* $C \geqslant 1+q^{1/2}$
q^n et $(q^{1/2})^n$ tendent tous deux vers 0 quand n tend vers $+\infty$, car q et $q^{1/2}$ sont dans $[0,1[$. D'où la suite de droite tend vers $1+q^{1/2}$ et, $C \geqslant 1+q^{1/2}$, par passage à la limite.

(e) Montrer que $C \geqslant 2$.
On remarque ensuite que $C \geqslant 1+q^{1/2}$ pour tout $q \in]0,1[$ donc en faisant tendre q vers 1, on obtient $C \geqslant 2$.
Là j'ai commencé à voir des raisonnements faux sur les inégalités du style $C \geqslant 1+q^{1/2}$ et $1+q^{1/2} \leqslant 2$ donc... A moins d'avoir $1+q^{1/2} \geqslant 2$, vous ne pouvez pas conclure ! Si vous ne tenez pas à passer à la limite, vous pouvez éventuellement me parler de la valeur maximale de $1+q^{1/2}$ (donc du sup de l'ensemble $\{1+q^{1/2}, q \in [0,1[\}$ qui s'obtient comme une limite d'ailleurs).

4. *Prenons $x_k = 1/b_k$ pour tout entier naturel non nul k.*

(a) *Vérifiez que* $u_k = \dfrac{1}{k+1}$ *pour tout entier naturel non nul k.*

On a

$$u_k = \left(\prod_{j=1}^{k} x_j\right)^{1/k} = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{b_j}\right)^{1/k} = \left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} b_j}\right)^{1/k}$$

Or, on a montré à la question 1a que: $\prod_{j=1}^{n} b_j = (k+1)^k$.

On a donc

$$u_k = \left(\frac{1}{(1+k)^k}\right)^{1/k} = \frac{1}{k+1}$$

(b) *Vérifiez que* $\forall j \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{j} \geqslant \ln(j+1) - \ln(j)$.

On raisonne par équivalence:

$$\frac{1}{j} \geqslant \ln(j+1) - \ln(j) \Leftrightarrow \frac{1}{j} \geqslant \ln\left(\frac{j+1}{j}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{j} \geqslant \ln\left(1+\frac{1}{j}\right)$$

et la dernière inégalité est vraie d'après l'énoncé.

Attention à ne pas juste me mettre une suite d'équivalences sans conclusion !!!!!

(c) *Déduisez de ces deux questions sans récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \ln(n+2) - \ln 2$.

On sait, d'après la question 2a) que $u_k = \frac{1}{k+1}$ donc $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$. Or, d'après la question précédente, $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{k+1} \geqslant \ln(k+2) - \ln(k+1)$$

En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+2) - \ln(k+1))$$

et on reconnaît une somme télescopique donc $\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+2) - \ln(k+1)) = \ln(n+2) - \ln(2)$. Ainsi, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \ln(n+2) - \ln(2)$$

(d) *Vérifiez (en prenant le* $\ln$*) que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, ekx_k \leqslant e^{\frac{1}{k+1}}$$

On raisonne par équivalence:

$$\begin{aligned}
ekx_k \leqslant e^{\frac{1}{k+1}} &\Leftrightarrow 1 + \ln(kx_k) \leqslant \frac{1}{k+1} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(k.\frac{k^{k-1}}{(k+1)^k}\right) \leqslant -\frac{k}{k+1} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) \leqslant -\frac{k}{k+1} \\
&\Leftrightarrow k\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \leqslant -\frac{k}{k+1} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \leqslant -\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Or, $-\dfrac{1}{k+1} > -1$ donc la dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on a donc montré l'inégalité demandée.

(e) *En déduire, à l'aide de l'inégalité (♯) et de la question* **I-1.b)**, *que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, e\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

On utilise l'inégalité montrée à la question précédente qu'on réécrit:

$$ex_k \leqslant \frac{1}{k}e^{k+1}$$

puis on applique (♯) et on obtient :

$$ex_k \leqslant \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k+1}+1\right)$$

On somme maintenant ces inégalités pour tout k variant de 1 à n, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} ex_k &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k(k+1)}+\frac{1}{k}\right)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k(k+1)}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&\leqslant 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\text{en utilisant la question I-1.b) avec } j=1\\
&\leqslant 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ car } \frac{1}{n+1}\geqslant 0
\end{aligned}$$

(f) *Vérifiez que :*

$$\forall k \geqslant 2, \frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1)$$

Déduisez-en une expression d'une suite $(\alpha_n)_n$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \alpha_n$$

On remarque que $\frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1) \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$. Or $\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ et on sait que $\ln(1-\frac{1}{k}) \leqslant -\frac{1}{k}$ d'où l'inégalité souhaitée en multipliant par -1.

On somme ensuite les inégalités en enlevant $k=1$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\ln(k)-\ln(k-1) = 1+\ln(n)$$

(g) *Montrez enfin que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, C \geqslant e\frac{\ln(n)-\ln(2)}{\ln(n)+3}$$

On sait que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \ln(n+2)-\ln(2) \geqslant \ln(n)-\ln(2)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant C \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \frac{C}{e}\left(2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{C}{e}(3+\ln(n))$$

d'où

$$C \geqslant e\frac{\ln(n)-\ln(2)}{\ln(n)+3}$$

(h) *Déduisez-en que* $C \geqslant e$*.* Ceci étant valable pour tout n, on peut faire tendre n vers $+\infty$ et on obtient l'inégalité souhaitée.

5. On a montré que e vérifiait (*) puis que c'était le plus petit réel vérifiant (*). C'est donc le minimum de l'ensemble des réels C vérifiant (*).

Quelques remarques générales sur ce problème:

- On évite de mettre une équivalence quand on somme car on perd l'équivalence. On a juste $u_k \leqslant v_k$ pour tout k qui implique $\sum u_k \leqslant \sum v_k$.
- On fait très attention avec les raisonnements par équivalence sur les inégalités. $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ implique $a \leqslant c$ mais $a \leqslant c$ n'est pas équivalent à $a \leqslant b$. Préférez une présentation :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &\leqslant .... \\ &\leqslant ... \\ &\leqslant ...\end{aligned}$$