Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2023-2024
DS 3

Devoir d'entrainement 3 3.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. ***Questions préliminaires :***

1. Montrer que $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x/2}-\sqrt{1+x}}{\cos(x)-\mathrm{ch}(x)}$.

3. L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2+1 \end{array} \right.$ est-elle injective? surjective?

Exercice 2.
Soit $\lambda > 0$. On pose:
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array} \right. .$$
On considère l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{\lambda e^{\lambda x}} = x \qquad (E)$$

1. Étudier les variations de f.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$, montrer que x est solution de (E).

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, montrer que si x est solution de (E) alors $f(x) = x$.

4. On considère la fonction:
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-x \end{array} \right. .$$
Quel est le lien entre les points d'annulation de g et les solutions de (E)?

5. Étudier les variations de la fonction g.

6. En déduire, selon la valeur de λ, le nombre de solutions de (E).

Exercice 3.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}$. Mettre S sous la forme $re^{i\alpha}$ avec $(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
   (a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. On exprimera le résultat à l'aide de $\tan \frac{\pi}{2n}$.
   (b) En déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{8}$.
3. Retrouver ce résultat en utilisant uniquement les formules trigonométriques.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $\omega = \exp \frac{2i\pi}{n}$ et pour tout $k \in [|0, n|], \omega_k = \omega^k$.

4. (a) Déterminer $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \omega_k$
   (b) Démontrer que pour tout nombre complexe z_1, z_2, on a $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathcal{R}e(z_1 \overline{z_2})$.
   (c) En déduire que $|1 - \omega_k|^2 = 2 - 2\mathcal{R}e(\omega_k)$.
   (d) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} | 1 - \omega_k|^2$
5. (a) Calculer $| 1 - \omega_k |$ en fonction de $\sin \frac{k\pi}{n}$.
   (b) En déduire la somme suivante: $\sum_{k=0}^{n-1} | 1 - \omega_k|$.
6. Calculer $W_n = \sum_{k=0}^{n-1} | \omega_{k+1} - \omega_k|$.
7. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} W_n$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 4.

On pose $F = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m(z) > 0\}$, $G = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ et:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & i\dfrac{1+z}{1-z}. \end{array}$$

1. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$, donner la forme algébrique de $h(e^{i\theta})$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, exprimer $\mathcal{R}e(h(z))$ et $\mathcal{I}m(h(z))$ en fonction de $\mathcal{I}m(z), |z|$ et $|1 - z|$.
3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
   (a) Montrer que $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow h(z) \in \mathbb{U}$.
   (c) Montrer que $z \in G \Leftrightarrow h(z) \in F$.
4. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$: $h(z) = z$.
5. Montrer que h induit une bijection $\tilde{h}$ entre deux ensembles que l'on précisera et donner l'expression de sa bijection réciproque.

Exercice 5.

On considère la fonction suivante:

$$f: \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \end{array}.$$

1. (a) Vérifier que f est bien définie sur $[0,\pi]$.
   (b) Montrer que:
   $$\forall a,b \in \mathbb{R}^{+*},\ \sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$
   (c) Étudier le signe de $f(x)-\sin x$ pour $x\in[0,\pi]$.
   (d) Montrer que $\forall x \in]0,\pi],\ \sin x < x$.
   (e) En déduire les solutions de l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,\pi]$ (on calculera $f(0)$, $f(\pi)$, $f(\frac{\pi}{3})$, $f'(0)$ et $f'(\pi)$) et tracer la courbe représentative de f.
   On considère la fonction suivante: $g: \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arccos\dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x} \end{array}.$
3. (a) Étudier les variations de la fonction suivante: $\varphi: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{4-5t}{5-4t} \end{array}.$
   (b) Montrer que g est bien définie sur $[0,\pi]$ et dérivable sur $]0,\pi[$ et calculer sa dérivée.
   (c) Tracer la courbe représentative de g.
4. Soit $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $z\in\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$ tel que $f(x)=f(z)$.
   (b) Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.
   (c) Calculer $f(g(x))$ et en déduire que $z=g(x)$.
5. Soit $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.
   (a) Exprimer $\cos(x+z)$ et $\cos(x-z)$ comme une fraction rationnelle en $\cos x$ uniquement.
   (b) Étudier les variations des fonctions suivantes:
   $$\varphi_1: \begin{array}{ccc} [0,\frac{\pi}{3}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t+g(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2: \begin{array}{ccc} [0,\frac{\pi}{3}] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t-g(t) \end{array}.$$
   (c) En déduire le signe de $\cos\dfrac{x+z}{2}$ et $\cos\dfrac{x-z}{2}$.
   (d) Exprimer $\cos\dfrac{x+z}{2}$ et $\cos\dfrac{x-z}{2}$ en fonction de $f(x)$.
6. (a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ est bijective à valeurs dans un intervalle J à préciser. On notera h sa bijection réciproque.
   (b) En utilisant les questions précédentes, déterminer la fonction h.

Correction du DS d'entrainement n 3

Exercice 1 1. Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $2\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\tan(2\theta)$ est bien définie. On sait que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ donc

$$\tan(2\theta) = \frac{\tan(\theta)+\tan(\theta)}{1-\tan^2\theta}$$

2. On a
   - $e^{x/2} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$.
   - $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$
   - $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
   - $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x)^2$

   On en déduit que

$$e^{x/2} - \sqrt{1+x} = \frac{x^2}{4} + o(x^2) \text{ donc } e^{x/2} - \sqrt{1+x} \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{4}$$

   et

$$\cos(x) - \mathrm{ch}(x) = -x^2 + o(x^2) \text{ donc } \cos(x) - \mathrm{ch}(x) \sim_{x\to 0} -x^2$$

   donc

$$\frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{\cos(x) - \mathrm{ch}(x)} \sim_{x\to 0} -\frac{1}{4}.$$

   Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x}}{\cos(x) - \mathrm{ch}(x)} = -\frac{1}{4}.$$

3. L'application n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$. En revanche, si $a \in \mathbb{C}$, alors $a-1$ admet au moins une racine carrée dans $\mathbb{C}$. On en déduit que a admet au moins un antécédent dans $\mathbb{C}$ donc f est surjective.

Exercice 2 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0$ donc

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

N'oubliez pas les limites quand on vous demande les variations !

2. On suppose que $f(x)=x$ alors $f(f(x))=f(x)=x$ donc x est solution de (E).

3. Soit $x\in\mathbb{R}$ solution de (E). On suppose, par l'absurde, que $f(x)\neq x$. Si $f(x)>x$, alors, par stricte croissance de f, on a $f\circ f(x)>f(x)$ d'où $x>f(x)$ puisque $f\circ f(x)=x$. On obtient une contradiction.

   On procède de même si $f(x)<x$. On en déduit que $f(x)=x$.

4. On considère la fonction:
$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-x. \end{array}$$
   On a vu dans les questions 2 et 3 que $f(x)=x \Leftrightarrow x$ solution de (E). On a donc
$$f(x)-x=0 \Leftrightarrow x \text{ solution de } (E)$$
   ou encore
$$g(x)=0 \Leftrightarrow x \text{ solution de } (E).$$
   Beaucoup d'entre vous m'écrivent des phrases du type " si g s'annule en x alors x est solution de (E) ce qui ne donne qu'une implication!

   (Si) vous n'avez pas montré la question 3, il faut l'admettre.

5. La fonction g est dérivable et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=\lambda e^{\lambda x}-1$. On a
$$g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda x}\geqslant 1 \Leftrightarrow e^{\lambda x}\geqslant \frac{1}{\lambda}(\lambda \text{ positif})$$
   On a donc
$$g'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda x\geqslant \ln\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x\geqslant -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$$
   Par ailleurs, on a
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty,$$
   et
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{\lambda x}\left(1-\frac{x}{e^{\lambda x}}\right)=+\infty$$
   par le thm de croissances comparées. On a donc :

x	$-\infty$		$-\frac{\ln\lambda}{\lambda}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

   Il est effarant de constater le nombre d'erreurs dans le calcul de la dérivée, dans la détermination de son signe ou encore de son minimum!

6. On a vu que les solutions de (E) sont exactement les points d'annulation de g.

   La fonction g atteint un minimum qui vaut $\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}$. On a $\frac{1+\ln\lambda}{\lambda}>0\Leftrightarrow \ln\lambda>-1\Leftrightarrow\lambda> e^{-1}$. On en déduit que

- Si $\dfrac{1+\ln\lambda}{\lambda} > 0$ c'est-à-dire si $\lambda > e^{-1}$, g ne s'annule pas donc (E) n'a pas de solution.
- Si $\dfrac{1+\ln\lambda}{\lambda} = 0$ c'est-à-dire si $\lambda = e^{-1}$, g ne s'annule une seule fois donc (E) a une unique solution.
- Si $\dfrac{1+\ln\lambda}{\lambda} < 0$ c'est-à-dire si $\lambda < e^{-1}$, g s'annule exactement deux fois donc (E) a deux solutions distinctes.

Exercice 3 1. Si $x \equiv 0[2\pi]$, alors la somme vaut n. Sinon, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ix})^k \\ &= \frac{1-(e^{ix})^n}{1-e^{ix}}, \text{ car } e^{ix} \neq 1 \\ &= \frac{-2ie^{\frac{inx}{2}} \sin\frac{nx}{2}}{-2ie^{\frac{ix}{2}} \sin\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} e^{\frac{i(n-1)x}{2}}\end{aligned}$$

Le résultat est bien sous la forme souhaitée.

Pour rappel, $\mathcal{I}m\left(\dfrac{1}{a+ib}\right)$ n'est pas égal à $\dfrac{1}{b}$ (sauf si $a=0$).

2. (a) Pour trouver la somme souhaitée, on remarque que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \mathcal{I}m\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}\right).$$

On utilise donc le résultat de la question précédente:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \mathcal{I}m\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}} e^{\frac{i(n-1)\pi}{2n}}\right) = \frac{\sin\frac{\pi(n-1)}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

On remarque que

$$\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

on a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

(b) Pour calculer $\tan\dfrac{\pi}{8}$, on applique le résultat trouvé à la question précédente en prenant $n=4$:

$$\sin(0) + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}},$$

donc

$$\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}},$$

puis

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

3. On écrit
$$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}},$$
on a donc
$$1-\tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8}.$$
On en déduit que $\tan\dfrac{\pi}{8}$ est racine de X^2+2X-1. Le discriminant vaut 8, les racines sont $-1\pm\sqrt{2}$. Comme $\tan\frac{\pi}{8}>0$, on en déduit que $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$. On retrouve le même résultat que précédemment.

On peut aussi écrire
$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{8} &= \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}\\ &= \frac{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}{2\cos^2\frac{\pi}{8}}\\ &= \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{8}}\end{aligned}$$
Or $\cos^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$ d'où
$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1,$$
en multipliant par la quantité conjuguée.

4. (a) On a
$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\omega_k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-\omega)^k = \frac{1-(-\omega)^n}{1+\omega} = \frac{1-(-1)^n}{1+\omega}$$
car c'est une somme géométrique donc
$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\omega_k = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2}{1+\omega} \text{ sinon}\end{cases}$$
Je ne compte pas le nombre de personnes qui ont écrit $(-e^{2i\pi/n})^n = -e^{2i\pi}$ (ou encore $e^{-2i\pi}$)

(b) Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. On a :
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\ &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\ &= z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\\ &= |z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+|z_2|^2\\ &= |z_1|^2+2\mathcal{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right)+|z_2|^2\end{aligned}$$
ce qui montre l'égalité souhaitée.

Dans la mesure où l'égalité vous ait donné, sans argument précis, on ne peut vous donner aucun point

(c) On applique l'égalité précédente à $z_1=\omega_k$ et $z_2=-1$. On a alors :
$$|1-\omega_k|^2 = |\omega_k-1|^2 = |\omega_k|^2+2\mathcal{R}e\left(-\omega_k\right)+|1|^2 = 2-2\mathcal{R}e(\omega_k),$$
car ω_k est de module 1.

Pareil ici, on vous donne la formule alors tachez de me convaincre que vous avez compris pourquoi elle se déduit de la question précédente.

(d) D'après la question précédente, on a:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mid 1-\omega_k|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2 - 2\mathcal{R}e(\omega_k) = 2n - 2\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}e(\omega_k).$$

Par linéarité de la partie réelle, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{R}e(\omega_k) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k\right) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

On reconnaît la somme des racines n-ièmes de l'unité qui vaut 0 donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mid 1-\omega_k|^2 = 2n.$$

5. (a) Le calcul a été fait ci-dessus : $\mid 1-\omega_k \mid = \sqrt{2-2\mathcal{R}e(w_k)} = \sqrt{2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt{4\sin^2\frac{k\pi}{n}} = \boxed{2\sin\frac{k\pi}{n}}$ car $k\pi/n$ appartient à l'intervalle $[0,\pi]$ sur lequel sin est positif.

   (b) On utilise la question précédente et la question 2a: $\sum_{k=0}^{n-1} \mid 1-\omega_k| = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \boxed{2\text{cotan}\frac{\pi}{2n}}$.

6. On a :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mid \omega_{k+1}-\omega_k| = \sum_{k=0}^{n-1} \mid \omega_{k+1}-\omega_k| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{k+1} - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{k}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left|e^{\frac{2i\pi}{n}}\right|^k}_{=1} \left|e^{\frac{2i\pi}{n}}-1\right| = n\left|e^{\frac{2i\pi}{n}}-1\right| = n\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = \boxed{2n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

7. $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} 2n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty} 2\pi\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = \boxed{2\pi}$.

   On aura reconnu que W_n est le périmètre d'un $n-$gone régulier inscrit dans le cercle unité. On pouvait ainsi s'attendre à ce que ce périmètre tende vers celui du cercle.

Exercice 4 1. Soit $\theta \in]0,2\pi[$, alors

$$\begin{aligned} h(e^{i\theta}) &= \frac{i(1+e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}} \\ &= \frac{ie^{i\theta/2}2\cos\frac{\theta}{2}}{e^{i\theta/2}(-2i\sin\frac{\theta}{2})} \\ &= -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= -\text{cotan}\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

où on a noté cotan l'inverse de tan.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors

$$\begin{aligned} i\frac{1+z}{1-z} &= \frac{i(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} \\ &= \frac{i(1-\overline{z}+z-|z|^2)}{|1-z|^2} \\ &= \frac{i(1-|z|^2+2i\mathcal{I}m(z)}{|1-z|^2} \\ &= \frac{-2\mathcal{I}m(z)+i(1-|z|^2)}{|1-z|^2} \end{aligned}$$

Erreur d'énoncé ici que plusieurs ont vu, il aurait été sympa de le signaler à Mme Peronnier pour qu'elle avertisse tout le monde.

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

   (a) On utilise la question précédente où on a montré que $\mathcal{I}m(h(z)) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$, on a donc

   $$h(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(h(z)) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}.$$

   On peut aussi, bien sûr, raisonner par équivalence.

   (b) On a

   $$h(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |i(1+z)| = |1-z| \Leftrightarrow |1+z| = |1-z|.$$

   Si on note M le point d'affixe z, alors $h(z) \in \mathbb{U}$ si et seulement si M appartient à la médiatrice des points $(-1,0)$ et $(1,0)$ ce qui est équivalent à M appartient à l'axe des ordonnées soit encore $z \in i\mathbb{R}$.
   On peut aussi, bien sûr, raisonner par équivalence avec les conjugués.

   (c) On utilise à nouveau la question 2). On a

   $$h(z) \in F \Leftrightarrow P Im(h(z)) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \Leftrightarrow 1-|z|^2 > 0 \Leftrightarrow |z| < 1 \Leftrightarrow z \in G$$

   On a bien l'équivalence souhaitée.

4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} h(z) = z &\Leftrightarrow \frac{i(1+z)}{1-z} = z \\ &\Leftrightarrow i(1+z) = z(1-z) \\ &\Leftrightarrow z^2 + (i-1)z + i = 0 \end{aligned}.$$

On calcule le discriminant $\Delta = -6i = 6e^{-\frac{i\pi}{2}}$ une racine est $\delta = \sqrt{6}e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Les racines sont donc

$$\frac{1-i \pm \sqrt{6}e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2}$$

C'est vraiment dommage que vous vous lanciez dans la recherche d'une racine carrée du discriminant sous la forme $a+ib$ alors qu'elle tombe immédiatement

5. Soit $a \in \mathbb{C}$, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} h(z) = a & \Leftrightarrow i(z+1) = a(1-z) \\ & \Leftrightarrow (i+a)z = a - i \end{aligned}$$

Si $a = -i$, l'équation n'a pas de solution. Si $a \neq -i$, elle admet une unique solution égale à $\dfrac{a-i}{a+i}$. On en déduit que $\operatorname{Im}(h) = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et h est injective sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ainsi, $\tilde{h} = h|^{\mathbb{C}\setminus\{-i\}}$ est bijective et $\tilde{h}^{-1} : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$.

très peu de personne ont traité (correctement) cette question, pourquoi?

Exercice 5 On considère la fonction suivante:

$$\begin{aligned} f: \quad [0,\pi] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} \end{aligned}.$$

1. (a) Soit $x \in [0,\pi]$. Alors $5 - 4\cos(x) = 1 + 4(1 - \cos x) \geqslant 1$ donc f est bien définie sur $[0,\pi]$.

   (b) Soit $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, alors

   $$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

   On a bien l'égalité souhaitée.

   (c) Soit $x \in [0,\pi]$. Alors

   $$\begin{aligned} f(x) - \sin(x) & = \sin(x)\left(\frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos(x)}} - 1\right) \\ & = \sin(x)\frac{1 - \sqrt{5 - 4\cos x}}{\sqrt{5 - 4\cos(x)}} \\ & = \frac{\sin x}{\sqrt{5 - 4\cos x}} \frac{4\cos(x) - 4}{\sqrt{5 - 4\cos(x)} + 1} \\ & \text{en utilisant la question précédente} \\ & = \frac{4\sin(x)(\cos x - 1)}{\sqrt{5 - 4\cos(x)} + 1} \end{aligned}$$

   On a $\sin(x) \geqslant 0$ et $\cos(x) - 1 \leqslant 0$ donc $f(x) - \sin(x) \leqslant 0$ pour $x \in [0,\pi]$.

   Certains s'en sortent aussi en raisonnant par équivalence et en utilisant $5 - 4\cos(x) = 1 + 4(1 - \cos x) \geqslant 1$ C'est étrange que vous ne vous soyez pas demandé pourquoi je vous demandais de montrer la formule de la question précédente

   (d) La fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ est de dérivée $x \mapsto 1 - \cos x$ positive. On en déduit qu'elle est strictement croissante et comme elle vaut 0 en 0, elle est strictement positive pour $x > 0$. On a bien

   $$\forall x \in]0,\pi], \sin x < x.$$

   Je ne veux pas croire que certains n'aient pas su faire !!!

   (e) On a vu que pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(x) \leqslant \sin(x)$ et pour tout $x \in]0,\pi], \sin(x) < x$. On a donc

   $$\forall x \in]0,\pi], f(x) < x.$$

   On en déduit que l'unique solution de $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$ est $x = 0$.

   Là, il faut vraiment avoir le réflexe de regarder ce que vous venez de faire, pourquoi vous poserait-on ces questions juste avant?

2. La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\forall x \in [0, \pi]$,

$$f'(x) = \frac{-2\cos^2 x + 5\cos x - 2}{(5 - 4\cos x)^{3/2}}$$

Le polynôme $-2X^2 + 5X - 2$ a pour racines 2 et $\frac{1}{2}$ et il est positif entre les racines. On a donc

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

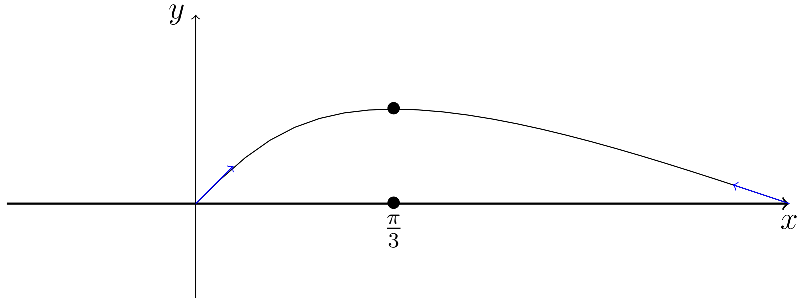
Le tableau de variations de f est donc

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On a

- $f(0) = 0 = f(\pi)$.
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et
- $f'(0) = 1,\ f'(\pi) = -\frac{1}{3}$.

On en déduit la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, \pi]$:



Je crois que personne n'a justifié correctement le signe de la dérivée. En posant le polynôme, vous arrivez à un point d'annulation en $\frac{\pi}{3}$ et, visiblement, vous en déduisez les variations en fonction des valeurs en 0 et π... ça se voit !!!!!

On considère la fonction suivante: $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos \dfrac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos x} \end{array} \right.$.

3. (a) On commence par étudier les variations de la fonction suivante $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{4 - 5t}{5 - 4t} \end{array} \right.$.

La fonction φ est dérivable sur $[-1, 1]$ et

$$\forall t \in [-1, 1], \varphi'(t) = -\frac{9}{(5 - 4t)^2}$$

on a donc le tableau de variations suivant :

x	-1 $\qquad\qquad$ 1
$\varphi'(x)$	$-$
φ	$1 \searrow -1$

(b) La fonction arccos est définie sur $[-1,1]$ et d'après le tableau de variations de la question précédente, on a

$$\forall x \in [0,\pi], \cos(x) \in [-1,1] \text{ donc } \varphi(\cos(x)) \in [-1,1].$$

La fonction g est donc bien définie sur $[0,\pi]$.

Certains encadrent numérateur et dénominateur et font un quotient (!!!!!) de ces encadrements....

La fonction arccos étant dérivable sur $]-1,1[$, la fonction g sera dérivable en tout point x vérifiant

$$\varphi(\cos(x)) \neq \pm 1.$$

D'après l'étude de φ, on a

$$\varphi(y) = \pm 1 \Leftrightarrow y = \pm 1,$$

on a donc

$$\varphi(\cos(x)) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \pi.$$

On a donc g dérivable sur $]0,\pi[$.

Me dire que $\varphi(cos(0)) = -1$ et $\varphi(\cos\pi) = 1$ ne suffit pas à justifier la dérivabilité sur $]0,\pi[$, il faut être sûr que ce sont les seules valeurs en lesquelles on a ± 1.

Pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$(\varphi \circ \cos)'(x) = -\sin(x)\varphi'(\cos x),$$

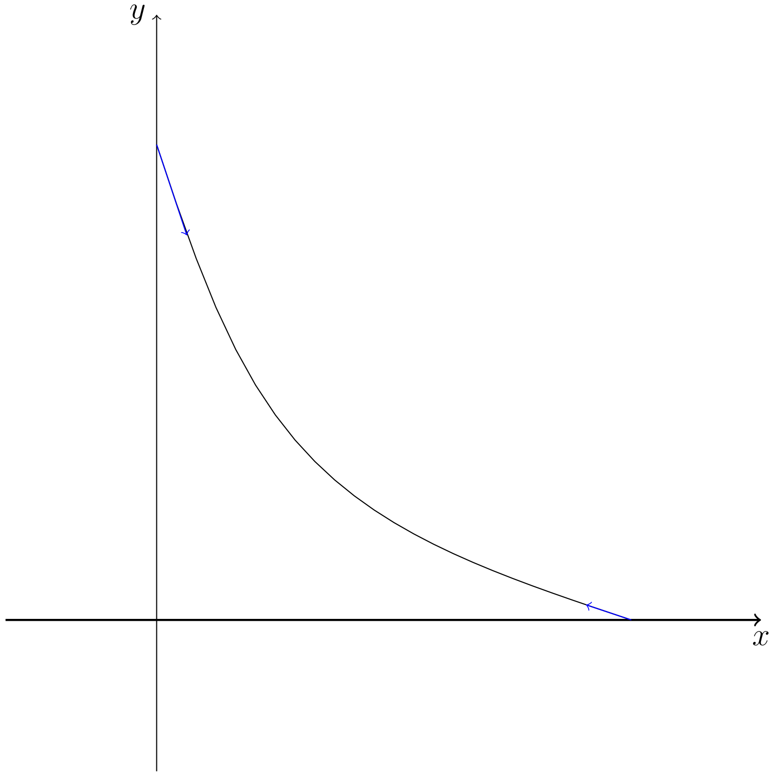
donc

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{-\sin(x)\varphi'(\cos x)}{\sqrt{1-\varphi(\cos x)^2}} \\
&= \frac{-9\sin x}{(5-4\cos x)^2\sqrt{1-\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)^2}} \\
&= \frac{-9\sin x}{(5-4\cos x)\sqrt{(5-4\cos x)^2-(4-5\cos x)^2}} \\
&= \frac{-9\sin x}{(5-4\cos x)\sqrt{(9-9\cos x)(1+\cos x)}} \\
&= \frac{-9\sin x}{3(5-4\cos x)\sqrt{1-\cos^2 x}} \\
&= -\frac{3}{5-4\cos x} \text{ car } \sin(x) > 0
\end{aligned}$$

(c) D'après l'expression de la dérivée trouvée à la question précédente, on a le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ π
$g'(x)$	$-$
g	π $\searrow$ 0

On a $g'(0) = -3$, $g'(\pi) = -\dfrac{1}{3}$ et $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. On en déduit la courbe représentative de g:



Pensez à calculer les tangentes en 0 et π pour tracer correctement la courbe

4. Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

   (a) On a $f(x) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[0, \dfrac{1}{2}\right] = f\left(\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]\right)$ d'après le tableau de variations de f. On sait donc que $f(x)$ admet un antécédent dans $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$. De plus, f est strictement décroissante sur cet intervalle donc injective. On en déduit que cet antécédent est unique, on a montré qu'il existe un unique $z \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(x) = f(z)$.

   (b) On a
$$\cos(g(x)) = \frac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos(x)},$$
   et
$$\sin g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 g(x)},$$
   car $g([0, \pi]) \sin[0, \pi]$ et sin est positive sur $[0, \pi]$. On a donc
$$\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5\cos x}{5 - 4\cos(x)}\right)^2} = \frac{3\sin x}{5 - 4\cos(x)}$$
   en utilisant le calcul fait pour la dérivée de g.

(c) On a

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5-4\cos(g(x))}}\\
&= \frac{3\sin x}{(5-4\cos x)\sqrt{5-4\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)}}\\
&= \frac{3\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}\sqrt{5(5-4\cos x)-4(4-5\cos x)}}\\
&= \frac{3\sin x}{3\sqrt{5-4\cos x}}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

On a $f(g(x)) = f(x)$. Or $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc $g(x) \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ par décroissance de g. Par unicité de z, on a bien

$$z = g(x)$$

5. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

(a) On a

$$\begin{aligned}
\cos(x+z) &= \cos(x)\cos z - \sin x \sin z\\
&= \cos(x)\cos(g(x)) - \sin x \sin g(x)\\
&= \frac{4\cos x - 5\cos^2 x - 3\sin^2 x}{5-4\cos x}\\
&= \frac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5-4\cos x}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos(x-z) &= \cos x\cos(g(x)) + \sin x \sin g(x)\\
&= \frac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5-4\cos x}
\end{aligned}$$

(b) On pose :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & [0, \frac{\pi}{3}] & \to & \mathbb{R}\\ & t & \mapsto & t+g(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \varphi_2 : & [0, \frac{\pi}{3}] & \to & \mathbb{R}\\ & t & \mapsto & t-g(t) \end{array}.$$

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, on a $\varphi_1'(t) = g'(t) + 1 = \dfrac{2(1-2\cos(t))}{5-4\cos t}$ donc

t	0		$\frac{\pi}{3}$
$\varphi_1'(t))$		$-$	
φ_1	π	$\searrow$	$\frac{2\pi}{3}$

La fonction φ_2 est croissante en tant que somme de fonctions croissantes. On a donc :

t	0		$\frac{\pi}{3}$
$\varphi_2'(t))$		$+$	
φ_2	-π	$\nearrow$	0

(c) On a

$$\cos\frac{x+z}{2} = \cos\frac{x+g(x)}{2} = \cos\left(\frac{1}{2}\varphi_1(x)\right) \geqslant 0$$

car $\frac{1}{2}\varphi_1(x) \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel cos est positif.
De même, on a

$$\cos\frac{x-z}{2} = \cos\frac{x-g(x)}{2} = \cos\left(\frac{1}{2}\varphi_2(x)\right) \geqslant 0$$

car $\frac{1}{2}\varphi_2(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, intervalle sur lequel cos est positif.

(d) On sait que pour tout réel a, on a $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ donc $\cos^2 a = \frac{\cos 2a + 1}{2}$. On a vu à la question précédente que $\cos\frac{x+z}{2}$ est positif. On a donc

$$\begin{aligned}
\cos\frac{x+z}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos(x+z)}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5 - 4\cos x}\right) + 1}{2} \\
&= \dots \\
&= \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sqrt{5 - 4\cos x}} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

De même, $\cos\frac{x-z}{2}$ est positif donc

$$\begin{aligned}
\cos\frac{x-z}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos(x-z)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \frac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5 - 4\cos x}}{2}} \\
&= \dots \\
&= 2f(x)
\end{aligned}$$

6. (a) On a vu que $f|_{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}$ est strictement croissante donc injective. On a $f\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc f induit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ vers $J = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On notera h sa bijection réciproque.

(b) On a vu que pour tout xß $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,

- $\cos\frac{x+g(x)}{2} = f(x)$
- $\cos\frac{x-g(x)}{2} = 2f(x)$

Par ailleurs, $\frac{x+g(x)}{2} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \in [0, \pi]$ donc

$$\frac{x+g(x)}{2} = \arccos f(x).$$

On a vu que $\dfrac{x-g(x)}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ donc

$$\arccos\cos\frac{x-g(x)}{2} = \frac{g(x)-x}{2}.$$

On a donc

- $\dfrac{x+g(x)}{2} = \arccos f(x)$
- $\dfrac{g(x)-x}{2} = \arccos 2f(x)$

On a donc $x = \arccos f(x) - \arccos(2f(x))$. On en déduit que