Correction du TD n 6

Correction 1 On raisonne par équivalence. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{array}{ll} & |z-1| = |z+1| \\ \Leftrightarrow & |z-1|^2 = |z+1|^2 \text{ par positivité du module} \\ \Leftrightarrow & (z-1)\overline{z-1} = (z+1)\overline{z+1} \\ \Leftrightarrow & z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 \\ \Leftrightarrow & 2(z+\overline{z}) = 0 \\ \Leftrightarrow & 4\mathcal{R}e(z) = 0 \\ \Leftrightarrow & z \in i\mathbb{R} \end{array}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 2 On raisonne par équivalence. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{array}{ll} & |z-1| = |z-i| \\ \Leftrightarrow & |z-1|^2 = |z-i|^2 \text{ par positivité du module} \\ \Leftrightarrow & (z-1)\overline{(z-1)} = (z-i)\overline{(z-i)} \\ \Leftrightarrow & z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 \\ \Leftrightarrow & -(z+\overline{z}) = i(z-\overline{z}) \\ \Leftrightarrow & -2\mathcal{R}e(z) = i(2i\mathcal{I}m(z) \\ \Leftrightarrow & \mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z) \end{array}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 3 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On va raisonner par équivalence:

$$\begin{array}{ll} h(z) \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow \dfrac{i(z+1)}{1-z} = \overline{\dfrac{i(z+1)}{1-z}} \\ & \Leftrightarrow i(z+1)(1-\overline{z}) = -i(\overline{z}+1)(1-z) \\ & \Leftrightarrow z - |z|^2 + 1 - \overline{z} = -\overline{z} + |z|^2 - 1 + z \\ & \Leftrightarrow 2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}. \end{array}$$

On a montré $h(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}$.

2. On va mettre $h(z)$ sous forme algébrique.

$$\begin{array}{ll} h(z) & = \dfrac{i(z+1)}{1-z} \\ & = \dfrac{i(z+1)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} \text{en multipliant par } 1-\overline{z} \\ & = \dfrac{i(z-|z|^2+1-\overline{z}}{|1-z|^2} \\ & = \dfrac{i(1-|z|^2+2i\mathcal{I}m(z)}{|1-z|^2} \\ & = \dfrac{-2\mathcal{I}m(z)+i(1-|z|^2)}{|1-z|^2}. \end{array}$$

On a $\mathcal{I}m(h(z)) = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ donc

$$\mathcal{I}m(h(z)) > 0 \Leftrightarrow |z| < 1.$$

Correction 4 On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{lll} \left(\dfrac{z+2i}{z-i}\right)^n = 1 & \Leftrightarrow & \exists k \in [|0, n-1|], \dfrac{z+2i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in [|0, n-1|], z+2i = (z-i)e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in [|0, n-1|], (1-e^{\frac{2ik\pi}{n}})z = -i\left(2+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \end{array}$$

Si $k=0$, il n'y a pas de solution. On a donc $k \in [|1, n-1|]$:

$$\left(\frac{z+2i}{z-i}\right)^n = 1 \quad \Leftrightarrow \exists k \in [|1, n-1|], z = \frac{-i\left(2+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Les solutions sont donc les complexes de la forme $\dfrac{i\left(2+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}$ pour k variant de 1 à $n-1$.

Correction 5 On écrit :

$$\begin{array}{ll} & |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'}) + (z-z')(\overline{z-z'}) \\ = & (z+z')(\overline{z}+\overline{z}') + (z-z')(\overline{z}-\overline{z}') \\ = & |z|^2 + z'\overline{z} + z\overline{z}' + |z'|^2 + |z|^2 - z'\overline{z} - z\overline{z}' + |z'|^2 \\ = & 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right). \end{array}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 6 1. Il suffit de montrer que $\forall z \in \mathbb{U}, 1 - \overline{a}z \neq 0$. On suppose par l'absurde qu'il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $1 - \overline{a}z = 0$. On a alors $\overline{a}z = 1$ d'où, en prenant le module, $|\overline{a}| = 1$ ce qui est absurde. On a montré que f est bien définie.

2. Soit $z \in \mathbb{U}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} |f(z)|=1 & \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=1 \\ \Leftrightarrow & |z-a|=|1-\overline{a}z| \\ \Leftrightarrow & (z-a)(\overline{z}-\overline{a})=(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \\ \Leftrightarrow & z\overline{z}-a\overline{z}-\overline{a}z+\overline{a}a=1-a\overline{z}-\overline{a}z+a\overline{a}z\overline{z} \\ \Leftrightarrow & |z|^2+|a|^2=1+|z|^2|a|^2 \\ \Leftrightarrow & 1+|a|^2=1+|a|^2 \text{car } |z|=1 \end{array}$$

La dernière égalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est et $f(z) \in \mathbb{U}$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{U}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} f(z)=\alpha \Leftrightarrow & \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}=\alpha \\ \Leftrightarrow & (z-a)=\alpha(1-\overline{a}z) \\ \Leftrightarrow & z(1+\overline{a}\alpha)=a+\alpha \\ \Leftrightarrow & z=\dfrac{a+\alpha}{1+\overline{a}\alpha} \text{car } 1+\overline{a}z\neq 0 \text{ d'après la première question} \end{array}$$

Par analogie avec la question précédente, on montre que $\left|\dfrac{a+\alpha}{1+\overline{a}\alpha}\right|=1$ ce qui montre que l'équation $f(z)=\alpha$ admet une solution dans $\mathbb{U}$ donc $f|^{\mathbb{U}}$ est bijective. Sa bijection réciproque est définie par $z \mapsto \dfrac{a+z}{1+\overline{a}z}$.

Correction 7 1. D'après la factorisation par l'arc moitié, on a

$$e^{ip}+e^{iq}=e^{\frac{i(p+q)}{2}}\left(e^{\frac{i(p-q)}{2}}+e^{-\frac{i(p-q)}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{\frac{i(p+q)}{2}}.$$

On a donc :

$$e^{ip}+e^{iq}=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{\frac{i(p+q)}{2}}.$$

2. En prenant la partie réelle de l'égalité trouvée à la question précédente, on obtient :

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{(p+q)}{2}\right).$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient :

$$\sin p+\sin q=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{(p+q)}{2}\right).$$

Correction 8

Analyse :On suppose que $u=e^{i\theta}$ s'écrit $\dfrac{\overline{z}}{z}$ avec $z=\rho e^{i\alpha}$, on a alors $u=e^{-2i\alpha}$. On a donc $\theta\equiv-2\alpha[2\pi]$ donc $\alpha\equiv-\dfrac{\theta}{2}[\pi]$.

Synthèse :Étant donné $u=e^{i\theta}$, on peut écrire $u=\dfrac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}}=\dfrac{\overline{z}}{z}$ avec $z=e^{-i\theta/2}$. On a montré l'implication souhaitée par analyse/synthèse.

Correction 9 1. Les racines carrées de -2 sont $\pm i\sqrt{2}$.

2. Les racines carrées de $i=e^{\frac{i\pi}{2}}$ sont $\pm e^{\frac{i\pi}{4}}$.
3. On écrit $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ donc les racines carrées sont $\pm\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}$.
4. On écrit $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-\frac{i\pi}{3}}$ donc les racines carrées sont $\pm e^{-\frac{i\pi}{6}}$.
5. Il n'y a pas de forme trigonométrique simple de $3+4i$, on cherche donc ses racines carrées sous la forme $a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $a^2+b^2=|3+4i|=5, a^2-b^2=\mathcal{R}e(3+4i)=3$ et $2ab=\mathcal{I}m(3+4i)=4$ d'où $a=\pm2$ et $b=\pm1$. Comme $ab>0$, les racines carrées de $3+4i$ sont $\pm(2+i)$.
6. Il n'y a pas de forme trigonométrique simple de $-3+4i$, on cherche donc ses racines carrées sous la forme $a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a $a^2+b^2=|-3+4i|=5, a^2-b^2=\mathcal{R}e(-3+4i)=-3$ et $2ab=\mathcal{I}m(-3+4i)=4$ d'où $a=\pm1$ et $b=\pm2$. Comme $ab>0$, les racines carrées de $1+2i$ sont $\pm(1+2i)$.

Correction 10 Les racines 5-ièmes de l'unité sont $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ pour k variant de 0 à 4.

Correction 11 On commence par mettre $1-i$ sous forme exponentielle :

$$1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Les racines 5-ièmes de $1-i$ sont donc $\sqrt[5]{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}=\sqrt[10]{2}e^{-\frac{i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}$ pour k variant de 0 à 4.

Correction 12 On écrit $-2+2i$ sous forme exponentielle :

$$-2+2i=2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

Les racines 5-ièmes de $-2+2i$ sont donc $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}=\sqrt[10]{8}e^{\frac{3i\pi}{20}+\frac{2ik\pi}{5}}$ pour k variant de 0 à 4.

Correction 13 On remarque que $z=0$ est solution. Si $z\neq0$, l'égalité des modules $|z|^5=|z|$ impose $|z|=1$. On a donc :

$$\begin{array}{ll} & z^5=\overline{z} \\ \Leftrightarrow & z^6=z\overline{z} \\ \Leftrightarrow & z^6=|z|^2 \\ \Leftrightarrow & z^6=1 \text{car } |z|=1 \end{array}$$

On sait que les racines 6-ièmes de l'unité sont $e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$, $k \in [\![0,5]\!]$. On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\left\{e^{\frac{ik\pi}{3}}, k \in [\![0,5]\!]\right\} \cup \{0\}.$$

Correction 14 Le discriminant vaut -3 donc les solutions sont $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Correction 15 Le discriminant vaut -12, les solutions sont $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}$.

Correction 16 On pose $Z = z^2$, il faut alors résoudre l'équation $Z^2+8Z+160 = 0$ dont le discriminant vaut $(24i)^2$ et les solutions sont $-4 \pm 12i$. On doit maintenant chercher les racines carrées de ces deux solutions. On cherche les racines carrées de $-4+12i$ sous la forme $a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & 4\sqrt{10} \\ a^2-b^2 & = & -4 \text{ et } \\ 2ab & = & 12 \end{array}\right. ,$$
Cela implique $a = \pm\sqrt{2\sqrt{10}-2}$ et $b = \pm\sqrt{2\sqrt{10}+2}$. Comme $ab > 0$, les racines carrées de $-4+12i$ sont

$$\pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}-2} + i\sqrt{2\sqrt{10}+2}\right).$$

De la même manière, on trouve que les racines carrées de $-4-12i$ sont

$$\pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}-2} - i\sqrt{2\sqrt{10}+2}\right).$$

On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$\pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}-2} + i\sqrt{2\sqrt{10}+2}\right) \text{ et } \pm\left(\sqrt{2\sqrt{10}-2} - i\sqrt{2\sqrt{10}+2}\right).$$

Correction 17 Le discriminant vaut 1, les solutions sont $\dfrac{1+2i\pm 1}{2}$ soit i et $1+i$.

Correction 18 Le discriminant vaut $-3+4i$ dont une racine carrée est $1+2i$ (d'après l'exercice 9). Les solutions sont donc, après simplification, $1+i$ et $2+3i$.

Correction 19 Le discriminant vaut $-75-100i = -25(3+4i)$. Pour en trouver une racine carrée, nous allons chercher une racine carrée de $3+4i$. D'après l'exercice 9, une racine carrée de $3+4i$ est $2+i$. On a alors $5i(2+i) = -5+10i$ une racine carrée du discriminant. Les solutions sont donc, après simplification, $-2i$ et $5-12i$.

Correction 20

1. On a $u+v = -1$ car la somme des racines 7ièmes de l'unité vaut 0 et $u^2 = u+2v$.
2. On en déduit que u vérifie $u^2+u+2 = 0$. On cherche les racines de cette équation, on trouve $\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$. Reste à encadrer la partie imaginaire de u pour savoir si elle est positive ou non. On a $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin\dfrac{8\pi}{7} \leqslant 0$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin\dfrac{4\pi}{7} \leqslant 1$ donc la somme des deux sinus est positive, on en déduit que
$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Correction 21 On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{11}}$ et on écrit $\sum_{k=1}^{10} z^k = -1$ puis, comme $z^i = \overline{z^{10-i}}$, on a

$$\sum_{k=1}^{5} 2\cos\frac{2k\pi}{11} = -1$$

On remarque enfin que $\cos\dfrac{2\pi}{11} = -\cos\dfrac{9\pi}{11}, \cos\dfrac{4\pi}{11} = -\cos\dfrac{7\pi}{11}, \ldots, \cos\dfrac{10\pi}{11} = -\cos\dfrac{\pi}{11}$.

On obtient

$$-2\sum_{k=0}^{4}\cos\frac{(k+1)\pi}{11} = -1,$$

puis le résultat souhaité en divisant par -2.

Correction 22 Notons M, P et P' les points d'affixes respectives z, 1 et -1. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & M, P, P' \text{ sont alignés} \\ \Leftrightarrow & M \text{ appartient à l'axe des abscisses} \\ \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R} \end{array}$$

On peut aussi raisonner avec la conjugaison :

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z-1}{z+1} = \overline{\dfrac{z-1}{z+1}} \\ \Leftrightarrow & (z-1)(\overline{z}+1) = (\overline{z}-1)(z+1) \\ \Leftrightarrow & z\overline{z}+z-\overline{z}-1 = \overline{z}z+\overline{z}-z-1 \\ \Leftrightarrow & 2(z-\overline{z}) = 0 \\ \Leftrightarrow & 4i\mathcal{I}m(z) = 0 \\ \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R} \end{array}$$

L'ensemble recherché est donc $\mathbb{R}$.

Correction 23 Notons M, P et P' les points d'affixes respectives z, i et 1. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & M, P, P' \text{ sont alignés} \\ \Leftrightarrow \quad & M \text{ appartient à la droite } (PP') \\ \Leftrightarrow \quad & M \text{ appartient à la droite } y = -x+1 \end{aligned}$$

L'ensemble recherché est donc l'ensemble des complexes z dont l'image appartient à la droite $y = -x + 1$.

Correction 24 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & |(1+i)z - 2i| = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \left| z - \frac{2i}{1+i} \right| = \sqrt{2} \text{En divisant l'égalité par } |1+i| = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \quad & |z - (1+i)| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre l'image de $1 + i$, de rayon $\sqrt{2}$.

Correction 25 On divise l'équation par $|2i|$, on obtient $\left| z + \dfrac{i-1}{2i} \right| = \dfrac{1}{2}$, que l'on peut réécrire $\left| z + \dfrac{1+i}{2} \right| = \dfrac{1}{2}$. On en déduire que l'ensemble des solutions est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre l'image de $-\left(\dfrac{1+i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

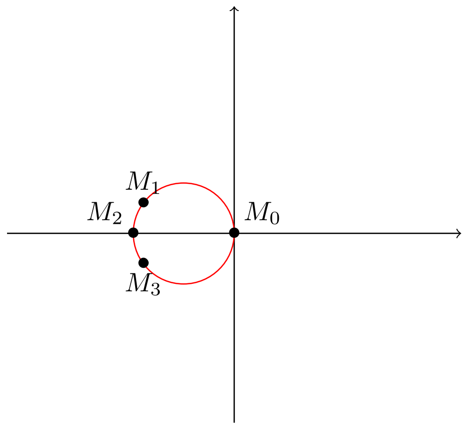
Correction 26 On doit avoir $|z| =| \frac{1}{z} |=| 1 - z |$ on a donc $|z| = 1$. Posons $z = x + iy$, on a alors $|1 - z| = 1$ ce qui implique $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ et comme $x^2 + y^2 = |z|^2 = 1$, on a $x = \frac{1}{2}$ et $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les complexes recherchés sont donc $e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$.

Correction 27 1. On cherche à résoudre $\left(\dfrac{2z+1}{z+1}\right)^4 = 1$. Les racines quatrième de l'unité sont $e^{\frac{2ik\pi}{4}} = e^{\frac{ik\pi}{2}}$ pour k variant de 0 à 3. On a donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2z+1}{z+1}\right)^4 = 1 \quad & \Leftrightarrow \left(\frac{2z+1}{z+1}\right) = e^{\frac{ik\pi}{2}},\ k \in [\![0,3]\!] \\ & \Leftrightarrow z = -\left(\frac{1-e^{\frac{ki\pi}{2}}}{2-e^{\frac{ki\pi}{2}}}\right),\ k \in [\![0,3]\!] \end{aligned}$$

En calculant explicitement ces valeurs pour $k = 0, 1, 2$ puis 3, on trouve $z_0 = 0$, $z_1 = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{i}{5}$, $z_2 = -\dfrac{2}{3}$ et $z_3 = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{i}{5}$.

2. On note $M_0, \ldots, M_3$ les points d'affixes $z_0, \ldots, z_3$. On a la figure suivante:



3. Si les quatre points sont cocycliques, le centre du cercle est sur la médiatrice des deux points M_1 et M_3 donc sur l'axe réel car leurs affixes sont conjuguées. Le centre doit également être sur la médiatrice de M_0 et M_2 c'est-à-dire sur la droite $y = -\dfrac{1}{3}$. Cela implique que le rayon est $\dfrac{1}{3}$. Pour montrer que les quatre points appartiennent bien au cercle de centre $(-\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{3}$, il suffit de vérifier que les modules des nombres complexes $z_i - (-\frac{1}{3}) = z_i + \frac{1}{3}$, pour $i \in [\![0,3]\!]$ valent $\frac{1}{3}$. On calcule donc $z_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $z_1 + 1 = -\frac{4}{15} + \frac{i}{5}$, $z_3 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ et $z_4 + 1 = -\frac{4}{5} - \frac{i}{5}$. On vérifie facilement que $|z_i + 1|^2 = \frac{1}{9}$ pour tout $i \in [\![0,3]\!]$ donc les points sont cocycliques et ils appartiennent au centre d'affixe $-\frac{1}{3}$ et de rayon $\frac{1}{3}$.

On peut aussi remarquer, que le triangle $M_0M_1M_3$ est isocèle donc le centre du cercle circonscrit au triangle appartient à la médiane de M_1M_3 qui est l'axe réel puisque z_1 et z_3 sont conjugués. On cherche un réel ω tel que $|0 - \omega| = | - \frac{3}{5} + \frac{i}{5} - \omega|$. On trouve $\omega = -\frac{1}{3}$ donc le cercle circonscrit à $M_0M_1M_3$ est le cercle de centre $(-\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{3}$. On vérifie ensuite que M_2 appartient à ce cercle.

Remarque. *il est également possible de résoudre le système*

$$|z_\Omega| = |-\frac{2}{3} - z_\Omega| = |-\frac{3}{5} + \frac{i}{3} - z_\Omega| = |-\frac{3}{5} - \frac{i}{3} - z_\Omega|$$

en cherchant z_Ω sous la forme $a+ib$, a,b réels. les deux premières égalités (au carré) donnent $a = -\frac{1}{3}$. On injecte la valeur de a dans l'égalité $|z_\Omega|^2 = |-\frac{3}{5} + \frac{i}{3} - z_\Omega|^2$, on trouve $b = 0$ donc $z_\Omega = -\frac{1}{3}$. On a donc $|-\frac{3}{5}+\frac{i}{3}-z_\Omega| = |-\frac{3}{5}-\frac{i}{3}-z_\Omega|$ et les quatre modules sont donc bien égaux.

Correction 28 Comme a et b sont distincts, $z \neq b$. On a $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z-a}{z-b} = e^{2ik\pi/n}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $z - a \neq z - b$, on exclut le cas $k = 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} & \frac{z-a}{z-b} = e^{2ik\pi/n} \\ \Leftrightarrow\ & z - a = (z-b)e^{2ik\pi/n} \\ \Leftrightarrow\ & z(1 - e^{2ik\pi/n}) = a - be^{2ik\pi/n} \\ \Leftrightarrow\ & z = \frac{a - be^{2ik\pi/n}}{1 - e^{2ik\pi/n}},\ k \in [\![1, n-1]\!] \text{car } \forall k \in [\![1, n-1]\!] \text{ donc } e^{2ik\pi/n} \neq 1 \end{aligned}$$

On remarque que les solutions correspondant à $k = 1$ et $k = n-1$ sont conjuguées et leurs affixes appartiennent donc à la droite verticale d'abscisses leur partie réelle commune. Il suffit de montrer que toutes les racines de l'équation ont la même partie réelle.

On utilise la factorisation par l'arc moitié au dénominateur :

$$1 - e^{2ik\pi/n} = -e^{ik\pi/n} 2i \sin\frac{k\pi}{n},$$

donc

$$\frac{1}{1 - e^{2ik\pi/n}} = \frac{ie^{-ik\pi/n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

On a :

$$\frac{a - be^{2ik\pi/n}}{1 - e^{2ik\pi/n}} = \frac{ie^{-ik\pi/n}(a - be^{2ik\pi/n})}{2\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{i(ae^{-ik\pi/n} - be^{ik\pi/n})}{2\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

Pour un nombre complexe Z, la partie réelle de iZ est égale à l'opposé de la partie imaginaire de Z donc

$$\mathcal{R}e\left(\frac{a - be^{2ik\pi/n}}{1 - e^{2ik\pi/n}}\right) = -\mathcal{I}m\left(\frac{ae^{-ik\pi/n} - be^{ik\pi/n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}}\right) = \frac{a\sin\frac{k\pi}{n} + b\sin\frac{k\pi}{n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{a+b}{2}.$$

On en déduit que toutes les solutions ont même partie réelle, elles sont donc les affixes de points alignés, appartenant à une droite verticale.

Correction 29 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \sin(5x) = \sin\left(\tfrac{2\pi}{3} + x\right) \\ \Leftrightarrow\ & 5x = \tfrac{2\pi}{3} + x + 2k\pi \text{ ou } 5x = \pi - \left(\tfrac{2\pi}{3} + x\right) + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{18}\left[\frac{\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est :

$$\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Correction 30 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \cos(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}.$$

L'ensemble des solutions est :

$$\left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Correction 31 On a $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sin(x)$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \cos(x) = \sin(x) \\ \Leftrightarrow\ & \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow\ & x \equiv \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right)[2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & x \equiv \frac{\pi}{2} - x[2\pi] \text{car on ne peut avoir } x \equiv x - \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & x \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on a $\cos(x) = -\sin(x) \Leftrightarrow \cos(-x) = \sin(-x)$ donc, d'après ce qui précède, $x = -\frac{\pi}{4}[\pi]$.

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction 32 On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & 4\sin(x)\cos(x) = 1 \\ \Leftrightarrow & 2\sin(2x) = 1 \\ \Leftrightarrow & \sin(2x) = \dfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & 2x \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \dfrac{\pi}{6}[2\pi] \\ \Leftrightarrow & x \equiv \dfrac{\pi}{12}[\pi] \text{ ou } \dfrac{5\pi}{12}[\pi] \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Correction 33 On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \cos^2(x) + 3\cos(2x) = 4 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\cos(2x)+1}{2} + 3\cos(2x) = 4 \\ \Leftrightarrow & \cos(2x) = 1 \\ \Leftrightarrow & 2x \equiv 0[2\pi] \\ \Leftrightarrow & x \equiv 0[\pi] \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Correction 34 On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \cos(2x) - 2\sin^2(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & 1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow & \sin^2(x) = \dfrac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \sin(x) = \pm\dfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & x \equiv \pm\dfrac{\pi}{6}[\pi] \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

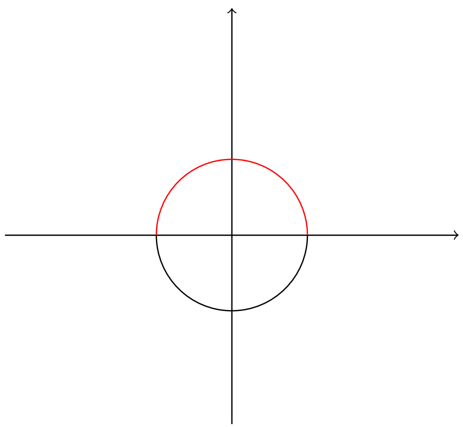
Correction 35 On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \\ \Leftrightarrow & \cos\left(2x - \dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \text{ car } \cos\left(a - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(a) \\ \Leftrightarrow & 2x - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{x}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{x}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{6k\pi}{5} \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{14} + \dfrac{6k\pi}{7}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc

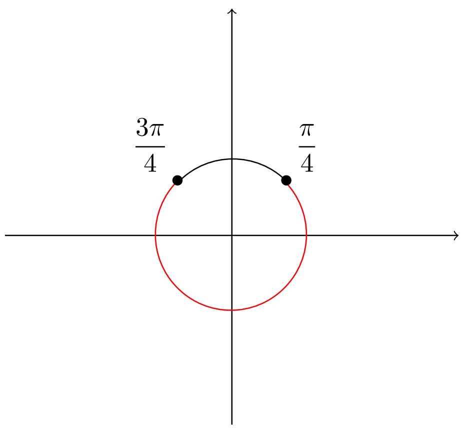
$$\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{6k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{14} + \frac{6k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Correction 36 On a la figure suivante:



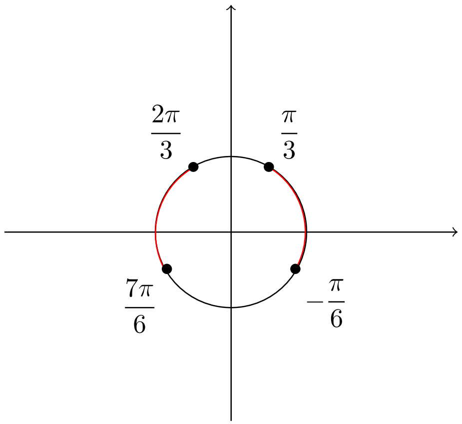
Si $x \in [0, 2\pi]$, on a $\sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$, on en déduit donc que l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$.

Correction 37 On a la figure suivante:



Si $x \in [0, 2\pi]$, on a $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$, on en déduit que l'ensemble des solutions est $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, 2(k+1)\pi\right]\right)$.

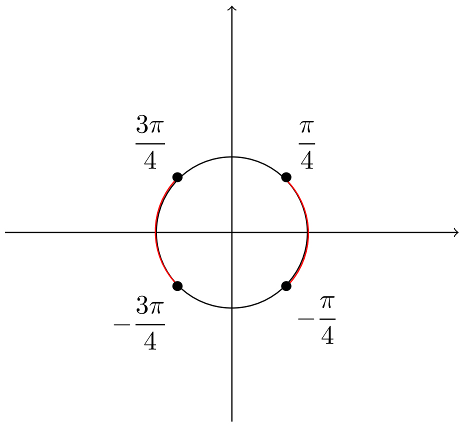
Correction 38 On a la figure suivante:



Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a $-\frac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$, on en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]\right).$$

Correction 39 On commence par résoudre $|\cos(y)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Si $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|\cos(y)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ donc pour $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(y) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]\right).$$

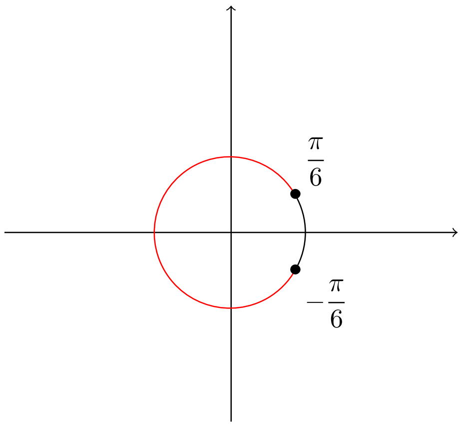
On a donc :

$$\begin{aligned} & |\cos(3x-1)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & (3x-1) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]\right) \end{aligned}$$

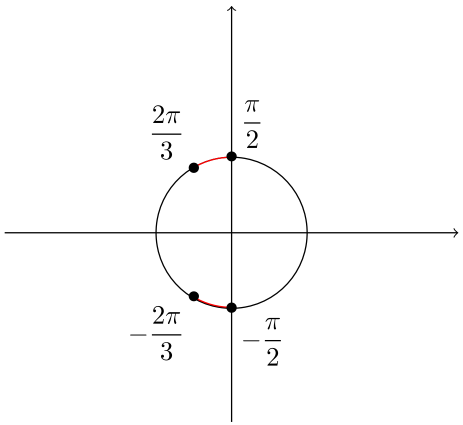
donc l'ensemble des solutions est :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\frac{1}{3} - \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right]\right).$$

Correction 40 On a la figure suivante:



Si $x \in [0, 2\pi]$, on a $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos(x) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ donc l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right]$.



Correction 41

Si $x \in [-\pi, \pi]$, on a $-\frac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ donc l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

Correction 42 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) \\ \Leftrightarrow\quad & 3x - \frac{\pi}{5} = x + \frac{4\pi}{5} + k\pi,\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}\ \cdot \\ \Leftrightarrow\quad & x = \frac{k\pi}{2},\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Comme tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, l'ensemble des solutions est

$$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Correction 43 On a $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ et $2\sin x \cos x = \sin(2x)$ donc l'équation est équivalente à :

$$\cos(2x) = \sin(2x),$$

soit encore

$$\cos(2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right).$$

On ne peut avoir $2x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, on en déduit que $2x = -\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ ce qui se réécrit :

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Correction 44 On a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}e\left(e^{ikx}\right) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right).$$

On reconnaît une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{(n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1}.$$

On factorise par l'arc moitié pour déterminer sa partie réelle:

$$\frac{e^{(n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{\frac{i(n+1)x}{2}} 2i \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{inx}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Correction 45 On écrit:

$$\forall k \in [|0,n|], \quad \cos^2(kx) = \frac{1}{2}\cos(2kx) + \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\cos(2kx) + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin(x)} + \frac{n+1}{2} \\ &\text{en utilisant l'exercice 44 avec } 2x \text{ dans le rôle de } x.\end{aligned} \quad .$$

Correction 46 On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}e\left(\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right).$$

On reconnaît une somme géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x)}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}$$

On multiplie par $\cos^{n+1}(x)$ au numérateur et au dénominateur:

$$\begin{aligned}\frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}} &= \frac{\cos^{n+1}(x) - e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)\left(\cos(x) - e^{ix}\right)} \\ &= \frac{\cos^{n+1}(x) - e^{i(n+1)x}}{-i\sin(x)\cos^n(x)} \\ &= \frac{i\cos^{n+1}x - ie^{i(n+1)x}}{\sin x \cos^n x}\end{aligned} \quad .$$

On prend la partie réelle:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right) &= \mathcal{R}e\left(\frac{i\cos^{n+1}(x) - ie^{i(n+1)x}}{\sin(x)\cos^n(x)}\right) \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)\cos^n(x)}\end{aligned} \quad ,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)\cos^n(x)}$$