

## Correction du TD n 5

---

**Correction 1** On écrit  $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} (1 - e^{-2x})$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \ln \operatorname{sh}(x) &= \ln\left(\frac{e^x}{2}\right) + \ln(1 - e^{-2x}) \\ &= x - \ln(2) + \ln(1 - e^{-2x}) \\ &= x \left(1 + \frac{\ln(1 - e^{-2x}) - \ln(2)}{x}\right) \\ &\sim x \text{ car } \frac{\ln(1 - e^{-2x}) - \ln(2)}{x} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

On a donc  $\ln(\operatorname{sh}(x)) \underset{+\infty}{\sim} x$ .

**Correction 2** On écrit :

$$\begin{aligned} x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x) &= x \ln(x) + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \ln(x) - \ln(x) \\ &= x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x) \\ &= -\ln(x) \left(\frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} + 1\right) \end{aligned}$$

On a donc  $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$ .

**Correction 3** On a

- $\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{(2x)^2}{8} + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$

donc  $\sqrt{1+2x} - e^{2x} = -\frac{5x^2}{2} + o(x^2)$  donc  $\sqrt{1+2x} - e^{2x} \sim -\frac{5x^2}{2}$ .

On a  $\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$  et  $\ln(1+2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$  donc

$$\sin \sqrt{x} - \ln(1+2\sqrt{x}) = -\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$$

puis  $\sin \sqrt{x} - \ln(1+2\sqrt{x}) \sim -\sqrt{x}$ . On en déduit donc  $\frac{\sqrt{1+2x} - e^{2x}}{\sin \sqrt{x} - \ln(1+2\sqrt{x})} \sim -\frac{5x\sqrt{x}}{2}$  donc la limite est nulle.

**Correction 4** On a

- $\sin(x) = x + o(x^2)$  et  $\operatorname{sh}(x) = x + o(x^2)$  donc  $\sin(x) - \operatorname{sh}(x) = o(x^2)$ .
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$  et  $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$  donc  $\cos(x) - \operatorname{ch}(x) = -x^2 + o(x^3)$ .

Ainsi,

$$\frac{\sin(x) - \operatorname{sh}(x)}{\cos(x) - \operatorname{ch}(x)} = \frac{o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = \frac{o(x^2)/x^2}{1 + o(x^2)/x^2}$$

avec  $\frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow 0$  donc la limite est nulle.

**Correction 5** On a

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 + o(x^2),$$

et  $\sin(x) - \tan(x) = x + o(x^2) - x + o(x^2) = o(x^2)$  donc  $\ln(1+x^2) + \sin(x) - \tan(x) \sim x^2$ .

On a également  $e^x = 1 + x + o(x)$  et  $\cos(x) = 1 + o(x)$  donc  $e^x - \cos(x) = x + o(x)$  ce qui implique  $e^x - \cos(x) \sim x$ . On en déduit que

$$\frac{\ln(1+x^2) + \sin(x) - \tan(x)}{e^x - \cos(x)} \sim \frac{x^2}{x} \sim x.$$

**Correction 6** On remarque que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\sqrt{1+2x} - 1) = 0$  donc

$$\ln(\sin(\sqrt{1+2x} - 1)) \sim \sin(\sqrt{1+2x} - 1).$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+2x} - 1 = 0$  donc

$$\sin(\sqrt{1+2x} - 1) \sim \sqrt{1+2x} - 1.$$

Enfin,  $\sqrt{1+2x} - 1 \sim x$ . Ainsi, un équivalent de  $\ln(1 + \sin(\sqrt{1+2x} - 1))$  en 0 est  $x$ .

**Correction 7** On a  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $\ln(1+y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$  donc

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

**Correction 8** On écrit  $x = 2 + h$  avec  $h \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 2$ . On a

$$\ln(x) = \ln(2+h) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + o(h^2) = \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$$

On n'oublie pas de revenir à  $x$ , le DL demandé est

$$\ln(x) = \ln(2) + \frac{(x-2)}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + o((x-2)^2).$$

On vérifie que le premier terme du DL ( $\ln(2)$ ) a bien même limite que  $\ln(x)$  quand  $x$  tend vers 2) et SURTOUT on ne développe pas  $(x-2)^2$

**Correction 9** On commence par regarder ce qu'il y a dans le  $\ln$ . On a

$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+o(x)) = 1+2x+o(x).$$

On en déduit que  $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \sim 2x$ . On peut aussi, si on préfère, écrire

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = o+o(x) - (-x+o(x)) = 2x+o(x).$$

On a  $1-x^2 \sim 1$  donc

$$\frac{1-x^2}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \sim \frac{2x}{x} = 2.$$

La limite cherchée est donc 2.

**Correction 10** On pose  $x = 1 - h$  avec  $h \rightarrow 0^+$ . On a  $1+x = 2-h$  et  $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{h}$ .

On a  $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{2-h}{h}\right) = \ln(2-h) - \ln(h) \sim -\ln(h)$  car  $\lim_{h \rightarrow 0^+} -\ln(h) = +\infty$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \ln(2-h) = \ln(2)$ .

On a également  $1-x^2 = h(2-h) \sim 2h$  lorsque  $h$  tend vers 0. On en déduit que  $\frac{h(2-h)}{1-h} \ln\left(\frac{2-h}{h}\right) \sim -2h \ln(h)$ . Par croissances comparées, cette limite est

nulle lorsque  $h$  tend vers 0. On en déduit que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2-h)}{1-h} \ln\left(\frac{2-h}{h}\right) = 0$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0.$$

**Correction 11** On a  $\sin(x) = x + o(x)^2$  donc  $\sin^2(x) = x^2 + 2xo(x^2) + o(x^2)^2 = x^2 + o(x^3) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$  et  $\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$  donc  $\ln(1+x^2) - \sin^2(x) = o(x^2)$ . On a  $e^x - \cos(x) = 1+x+o(x) - 1+o(x) = x+o(x)$  donc  $e^x - \cos(x) \sim x$ .

On en déduit que

$$\frac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{e^x - \cos(x)} = \frac{o(x^2)}{x+o(x)} = \frac{o(x^2)/x}{1+o(1)} \rightarrow 0$$

**Correction 12** On écrit  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \left( \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) \right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

On sait que  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} x - \frac{\pi}{3}$ . On en déduit que :

$$\frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{(3x - \pi) \cos x} \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} \frac{2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{(3x - \pi) \cos(x)} \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} \frac{2}{3 \cos(x)}$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos(x) = \frac{1}{2}$  d'où  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}$ . On a donc  $\frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{(3x - \pi) \cos x} \underset{\frac{\pi}{3}}{\sim} \frac{4}{3}$ .

**Correction 13** On sait que  $\sin x$  tend vers 0 quand  $x \rightarrow 0$  donc  $\frac{1}{1 + \sin(x)} - 1 \sim \sin(x)$

puis  $\frac{1}{1 + \sin(x)} - 1 \sim x$  car  $\sin(x) \sim x$ . On a donc

$$\frac{1}{1 + \sin(x)} = 1 - x + o(x)$$

On sait que  $e^x \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow 0$ . On a  $e^{e^x} - e = e(e^{e^x-1} - 1)$ . Comme  $e^x - 1 \rightarrow 0$ , on a  $e^{e^x-1} - 1 \equiv e^x - 1$  puis, comme  $e^x - 1 \equiv x$ , on obtient  $e^{e^x-1} - 1 \sim x$ . En multipliant par  $e$ , on obtient

$$e(e^{e^x-1} - 1) \sim ex$$

d'où

$$e^{e^x} = e + ex + o(x)$$

**Correction 14** On sait que  $\sin(x) \rightarrow 0$  donc  $e^{\sin(x)} - 1 \sim \sin(x)$  puis  $e^{\sin(x)} - 1 \sim x$  et enfin

$$(e^{\sin(x)} - 1)^2 \sim x^2$$

On a donc

$$(e^{\sin(x)} - 1)^2 = x^2 + o(x^2).$$

De même,  $\sin(x) \rightarrow 0$  donc  $2 \tan(\sin^2(x)) \rightarrow 0$ , on a donc

$$\begin{aligned} \ln(1 + 2 \tan(\sin^2(x))) &\sim 2 \tan(\sin^2(x)) \\ &\sim 2 \sin^2 x \text{ car } \tan(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y \\ &\sim 2x^2 \text{ car } \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ donc } \sin^2(x) \sim x^2 \end{aligned}$$

On a donc  $\ln(1 + \tan(\sin^2(x))) \sim 2x^2$  d'où

$$\ln(1 + \tan(\sin^2(x))) = 2x^2 + o(x^2)$$

**Correction 15** 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\arctan(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\cos$  est positif sur cet intervalle. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \cos \arctan x &= \frac{\sqrt{\cos^2 \arctan x}}{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \arctan(x)}} \text{ car } 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos \arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Pour  $x \in [0, \pi]$ , on a  $\arccos \cos(x) = x$ .

Pour  $x \in [-\pi, 0]$ , on a  $-x \in [0, \pi]$  et  $\cos(-x) = \cos(x)$  donc, d'après ce qui précède,  $\arccos \cos(x) = -x$ .

Enfin, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exists n \in \mathbb{Z}$  tel que  $x + 2n\pi \in [-\pi, \pi]$ , on a alors :

$$\cos \arccos(x) = \begin{cases} x + 2n\pi & \text{si } x + 2n\pi \in [0, \pi] \\ -(x + 2n\pi) & \text{si } x + 2n\pi \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

3. Pour  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\arcsin \sin(x) = x$ .

Pour  $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , on a  $\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$  donc, d'après ce qui précède,  $\arcsin \sin(x) = \pi - x$ .

Enfin, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exists n \in \mathbb{Z}$  tel que  $x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , on a alors :

$$\sin \arcsin(x) = \begin{cases} x + 2n\pi & \text{si } x + 2n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ (1 - 2n)\pi - x & \text{si } x + 2n\pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

**Correction 16** Pour  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\arctan \tan(x) = x$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exists n \in \mathbb{Z}$  tel que  $x + n\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , on a alors :  $\arctan \tan(x) = x + n\pi$  par  $\pi$ -périodicité de  $\tan$ .

**Correction 17** On écrit :

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan \arcsin(x)}{\sin \arcsin(x)} \\ &= \frac{x}{\cos \arcsin(x)} \text{ car } \arcsin \text{ appartient à } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ sur lequel } \cos \text{ est positif} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin(x)}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

On a donc,  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\tan \arcsin(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Correction 18** 1. Il faut  $x > 0$ ,  $x < 1$  et  $\sqrt{1-x} \in [-1, 1]$  ce qui est le cas si  $x \in [0, 1]$ . On a :

$$\begin{aligned} \arcsin(\sqrt{x}) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \arcsin(\sqrt{1-x}) \\ \Leftrightarrow \arcsin(\sqrt{x}) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{1-x}) \end{aligned}$$

Comme  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{1-x}$  sont deux quantités positives, on sait que  $\arcsin(\sqrt{x})$  et  $\arcsin(\sqrt{1-x})$  appartiennent à  $[0, \frac{\pi}{2}]$  donc  $\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1-x} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , intervalle sur lequel  $\sin$  est injectif donc :

$$\begin{aligned} \arcsin(\sqrt{x}) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{1-x}) \\ \Leftrightarrow \sin(\arcsin(\sqrt{x})) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{1-x})\right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \cos(\arcsin(\sqrt{1-x})) \end{aligned}$$

Or,  $\cos$  est positif sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , donc

$$\cos(\arcsin(\sqrt{1-x})) = \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin \sqrt{1-x}} = \sqrt{x}.$$

La dernière égalité est vraie. Par équivalence, l'égalité initiale est donc vraie pour tout  $x \in [0, 1]$ .

**Correction 19** On note  $\alpha = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$ . Les réels  $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$  et  $\frac{1}{8}$  sont tous inférieurs à  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  donc, par croissance de  $\arctan$ ,  $\arctan \frac{1}{2} < \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$  et de même pour  $\arctan \frac{1}{5}$  et  $\arctan \frac{1}{8}$ . On a donc :

$$\alpha < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

et  $\alpha > 0$ . Comme  $\tan$  est injective sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow \tan \alpha &= \tan\left(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}\right). \end{aligned}$$

On sait que  $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ . Donc :

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2} + \tan(\arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8})}{1 - \frac{1}{2} \tan(\arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8})}.$$

Or  $\tan(\arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{13}{41}$ . On a donc  $\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2} + \frac{13}{41}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{41}} = 1$ .

Comme  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

**Correction 20** On pose  $\beta = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2 + \sqrt{3})$ . Comme  $\arctan a$  a pour image  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et que  $\sqrt{3} < 2$ , on a  $\arctan(2) \in ]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ . Ceci étant également vrai pour  $\arcsin 3$  et  $\arctan(2 + \sqrt{3})$ , on a  $\beta \in ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ . Or  $\tan$  est injective sur  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  donc :

$$\begin{aligned} \beta &= \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2 + \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow \tan \beta &= \tan(\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2 + \sqrt{3})). \end{aligned}$$

En utilisant la formule  $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ , on trouve :

$$\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}.$$

Comme  $\beta \in ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ , on a  $\beta = \frac{7\pi}{6}$ .

**Correction 21** 1. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . On raisonne par équivalence.

On a  $x \in ]-1, 1[$  donc  $\arctan(x) \in ]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$  d'où  $2\arctan(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Par définition de la fonction  $\arctan$ , on a  $\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On en déduit que les deux membres de l'égalité à montrer appartiennent à l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur lequel  $\tan$  est injectif. On a donc :

$$\begin{aligned} 2\arctan(x) &= \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \\ \Leftrightarrow \tan(2\arctan(x)) &= \tan\left(\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right) \text{ car } \tan \text{ est injective sur } ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ \Leftrightarrow \tan(2\arctan(x)) &= \frac{2x}{1-x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2\tan\arctan(x)}{1-\tan^2\arctan(x)} &= \frac{2x}{1-x^2} \text{ car } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2} &= \frac{2x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie pour tout  $x \in ]-1, 1[$ . Par équivalence, on en déduit que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

2. On pose  $f(x) = 2\arctan x$  et  $g(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ . Les deux fonctions sont dérivables sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  donc sur  $]-1, 1[$ . Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2 + 4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

On a donc  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $f'(x) = g'(x)$ , il existe donc  $K_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $f(x) = g(x) + K_1$ . Pour  $x = 0$ , on a  $f(0) = g(0) = 0$  donc  $K_1 = 0$  et les deux fonctions sont égales.

3. On reprend le calcul fait à la question précédente. La fonction  $f - g$  est de dérivée nulle, elle est donc constante sur chaque intervalle où elle est dérivable. Il existe donc deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  telles que :

$$\forall x \in ]-\infty, -1[, f(x) = g(x) + K_1,$$

et

$$\forall x \in ]1, +\infty[, f(x) = g(x) + K_2.$$

Pour déterminer  $K_2$ , on peut prendre  $x = \sqrt{3}$ . On obtient  $\frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + K_2$  d'où  $K_2 = \pi$ . On peut aussi faire tendre  $x$  vers  $+\infty$  ce qui implique  $K_2 = \pi$ .

Pour déterminer  $K_1$ , on peut utiliser l'imparité des deux fonctions et en déduire

que  $K_1 = -K_2$ . On a montré que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2 \arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - \pi & \text{si } x < -1 \\ 2 \arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ 2 \arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \pi & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$$

**Correction 22** On commence par regarder pour quelles valeurs de  $x$  cette équation est définie.  $\arcsin$  étant définie sur  $[-1, 1]$ , on doit avoir  $x, 2x$  et  $\sqrt{3}x$  dans cet intervalle, ce qui impose  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . On a alors  $\arcsin(x\sqrt{3}) \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$  et  $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$  donc  $\arcsin(x\sqrt{3}) + \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Le sinus étant injectif sur ce segment, l'égalité est équivalente à :

$$\sin(\arcsin(2x)) = \sin(\arcsin(x\sqrt{3}) + \arcsin(x))$$

ou encore à :

$$2x = x \cos \arcsin x\sqrt{3} + x\sqrt{3} \cos \arcsin x.$$

On a donc  $x = 0$  solution évidente. On simplifie les cosinus qui sont positifs et donc égaux à  $\sqrt{1 - \sin^2}$  et on trouve :

$$2 = \sqrt{1 - 3x^2} + \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}.$$

Ensuite on procède par équivalence:

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{1 - 3x^2} + \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} \\ \Leftrightarrow 4 &= (1 - 3x^2) + 3(1 - x^2) + 2\sqrt{3(1 - 3x^2)(1 - x^2)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 &= \sqrt{(1 - 3x^2)(1 - x^2)} \\ \Leftrightarrow 3x^4 &= 1 - 4x^2 + 3x^4 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Les solutions trouvées appartiennent bien à  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  donc les solutions sont  $0, \frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$ .

**Correction 23** On remarque que  $\frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$  donc  $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ . On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} \\ \Leftrightarrow x &= \sin\left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}\right) \text{ car les deux membres appartiennent à } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4}{5} \cos \arcsin \frac{5}{13} + \frac{5}{13} \cos \arcsin \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \text{ car } \cos \arcsin \geq 0 \text{ donc } \cos = \sqrt{1 - \sin^2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{63}{65} \end{aligned}$$

L'unique solution est  $x = \frac{63}{65}$ .

**Correction 24** On a  $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ . L'équation est équivalente à  $\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) = \arcsin(x)$ . Le membre de gauche étant positif, puisque  $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on en déduit que  $\arcsin(x) > 0$  donc  $x > 0$ . On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin x \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \arcsin x &= \arcsin \frac{5}{13} \\ \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) &= \frac{5}{13} \text{ car les deux membres appartiennent à } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow \cos \arcsin(x) &= \frac{5}{13} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\cos^2 \arcsin(x)} &= \frac{5}{13} \text{ car } \cos \arcsin \geq 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} &= \frac{5}{13} \\ \Leftrightarrow 1 - x^2 &= \frac{25}{169} \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{144}{169} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{12}{13} \text{ car } x > 0 \end{aligned}$$

L'unique solution est donc  $\frac{12}{13}$ .

**Correction 25** On remarque que  $\arctan(x)$  et  $\arctan\left(\frac{2x}{3}\right)$  ont même signe : positif lorsque  $x$  est positif, négatif sinon. On peut donc affirmer que :  $x \geq 0$ . Cela implique :

$$\arctan(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ et } \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

On a:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{2x}{3}\right),$$

et les deux membres de la deuxième égalité appartiennent à  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , intervalle sur lequel  $\tan$  est injective. On peut donc raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} \arctan(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) &\Leftrightarrow x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{2x}{3}\right)\right) \Leftrightarrow x = \frac{1 - \frac{2x}{3}}{1 + \frac{2x}{3}} \\ \Leftrightarrow x\left(1 + \frac{2x}{3}\right) = 1 - \frac{2x}{3} &\Leftrightarrow \frac{2x}{3}x^2 + \frac{5x}{3}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{4} & \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ car } x \geq 0 & \end{aligned}$$

L'unique solution est donc  $x = \frac{1}{2}$

**Correction 26** L'image de  $\arcsin$  est  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , celle de  $\arccos$  est  $[0, \pi]$  donc, pour qu'il y ait égalité, les deux membres doivent appartenir à  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , ce qui impose  $x \geq 0$ . On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \arcsin(2x) = \arccos(x) & \\ \Leftrightarrow \sin \arcsin(2x) = \sin \arccos(x) &\text{ car } \sin \text{ est injectif sur } [0, \frac{\pi}{2}] \\ \Leftrightarrow 2x = \sin \arccos(x) & \\ \Leftrightarrow 4x^2 = \sin^2 \arccos(x) &\text{ car les deux membres sont positifs} \\ \Leftrightarrow 4x^2 = 1 - x^2 & \\ \Leftrightarrow 5x^2 = 1 & \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ car } x \geq 0 & \end{aligned}$$

L'unique solution est  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Correction 27** Si  $x \in [-1, 1]$ , on a bien  $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$ , d'après l'exercice ???. Les deux membres appartiennent à  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  donc on peut appliquer  $\sin$ . On obtient :

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin(\arctan x).$$

En écrivant  $\sin = \cos \cdot \tan$  et en simplifiant  $\tan(\arctan(x)) = x$ , l'égalité devient

$$\frac{2x}{1+x^2} = x \cdot \cos \arctan x$$

et comme  $\cos$  est positif sur cet intervalle et que  $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$ , on a :

$$\cos \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\arctan x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

L'équation est donc équivalente à  $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  ce qui est équivalent à  $x = 0$  ou  $2 = \sqrt{1+x^2}$  soit  $x = \pm\sqrt{3}$ . Les solutions sont donc 0 et  $\pm\sqrt{3}$ .

**Correction 28** Si  $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , cette équation n'a pas de solution car l'image de  $\arcsin$  est  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . De plus, cette équation n'est définie que si  $\tan x \in [-1, 1]$  soit  $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \arcsin \tan(x) = x & \\ \Leftrightarrow \tan(x) = \sin(x) &\text{ car les deux membres appartiennent à } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ sur lequel} \\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) & \\ \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1 & \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ car } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \end{aligned}$$

L'unique solution est  $x = 0$ .

**Correction 29** Il faut  $x \neq 0$ ,  $\frac{1-x}{x} \geq 0$  et  $2x-1 \in [-1, 1]$  ce qui impose  $x \in ]0, 1]$ .

Comme  $\sqrt{\frac{1-x}{x}} \geq 0$ , on a  $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  donc  $2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \in [0, \pi]$ .

On suppose donc  $x \in ]0, 1]$  et on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1) &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) &= \arcsin(2x-1) \\ \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) &= 2x-1 \\ \text{car les deux membres appartiennent à } &[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ sur lequel } \sin \text{ est injectif} \\ \Leftrightarrow \cos\left(2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) &= 2x-1 \\ \Leftrightarrow 2\cos^2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) - 1 &= 2x-1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} = 2x \text{ car } \cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2} & \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1-x} = 2x & \\ \Leftrightarrow x = x & \end{aligned}$$

La dernière égalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que l'équation est vraie pour tout  $x \in ]0, 1]$ .

**Remarque.** On a d'abord réécrit l'équation de façon à ce que chaque membre appartienne à  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

**Correction 30** La fonction est  $2\pi$ -périodique. D'après l'exercice 15, on a :

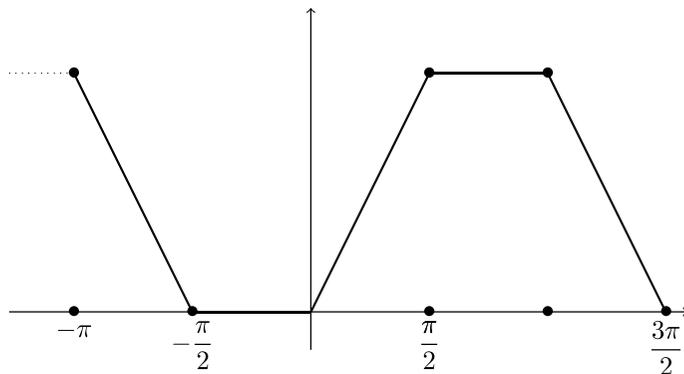
- Si  $x \in [-\pi, 0]$ , alors  $\arccos \cos(x) = -x$ .
- Si  $x \in [0, \pi]$ , alors  $\arccos \cos(x) = x$ .
- Si  $x \in [\pi, 2\pi]$ , alors  $\arccos \cos(x) = 2\pi - x$ .

D'après l'exercice 15, on a :

$$\arcsin \sin(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ x & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \quad \text{On en déduit que :}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 2x & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ \pi - x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \pi & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

On complète par  $2\pi$ -périodicité de la fonction :



**Correction 31** On remarque que  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$  donc  $\frac{1 + \sin(x)}{2} \in [0, 1]$  ce qui montre que  $f$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on va l'étudier sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ . On sait que arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$ ,  $f$  n'est donc pas dérivable lorsque  $\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} = 1$  c'est-à-dire pour  $x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ . On sait également que la racine carrée n'est pas dérivable en 0 donc  $f$  n'est pas dérivable lorsque  $\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} = 0$  c'est-à-dire pour  $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ . On peut donc dériver la fonction  $f$  sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \cup ] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ .

La dérivée de  $x \mapsto \sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}$  est :

$$\frac{\cos(x)}{2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}} = \frac{\cos(x)}{4\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}}.$$

On en déduit que, pour tout  $x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \cup ] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\cos(x)}{4\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}\sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sin(x)}{2}\right)}} \\ &= -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{1 + \sin(x)}\sqrt{1 - \sin(x)}} \\ &= -\frac{\cos(x)}{2|\cos(x)|}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in ] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \end{cases}$$

On sait donc qu'il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

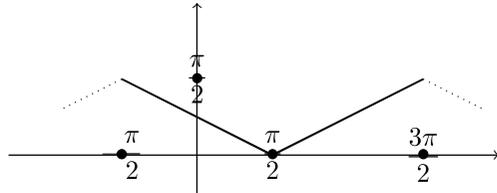
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + a & \text{si } x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ \frac{x}{2} + b & \text{si } x \in ] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[ \end{cases}$$

En calculant  $f(0) = \frac{\pi}{4}$ , on trouve  $a = \frac{\pi}{4}$ . Par ailleurs,  $f$  est continue donc continue

en  $\frac{\pi}{2}$ . On a donc  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  d'où l'on déduit  $b = -\frac{\pi}{4}$ . Ainsi, on a :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \end{cases}$$

ce qui permet de tracer  $f$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$  puis d'en déduire l'allure de  $f$  par  $2\pi$ -périodicité :



**Correction 32** On pose  $g : x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ . Elle est définie sur  $[-1, 1]$  et dérivable

sur  $] -1, 1[$  avec,  $\forall x \in ] -1, 1[$ ,

$$g'(x) = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{4x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

$x$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$g$	0		1	0
		↘	↗	↘
		-1		0

On en déduit que  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $g(x) \in [-1, 1]$  ce qui montre que  $f$  est bien définie sur  $[-1, 1]$ . Elle est dérivable lorsque  $1-x^2 \neq 0$  et  $2x\sqrt{1-x^2} \neq \pm 1$  donc sur  $] -1, 1[ \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ . Pour tout  $x \in ] -1, 1[ \setminus \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ , on a :

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}.$$

On a  $1-4x^2(1-x^2) = 4x^4 - 4x^2 + 1 = (1-2x^2)^2$ . On obtient donc

$$f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}|1-2x^2|} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 1-2x^2 \geq 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[ \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in \left] -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right[ \cup \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[ \end{cases}$$

ça n'est demandé (pourquoi????) mais on pourrait évidemment ne pas s'arrêter là et déterminer une expression simplifiée de  $f$ .

On remarque tout d'abord que  $f$  et  $2\arcsin$  ont des dérivées égales sur  $\left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$ , les deux fonctions sont donc égales à constante près. On a  $f(0) = 0 = 2\arcsin(0)$  donc

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[, f(x) = 2\arcsin(x).$$

Par ailleurs,  $f$  et  $-2\arcsin$  ont même dérivée sur les intervalles  $\left] -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right[$  et  $\left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$ , il existe donc deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  tel que

$$f(x) = \begin{cases} -2\arcsin(x) + c_1 & \text{si } x \in \left] -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right[ \\ -2\arcsin(x) + c_2 & \text{si } x \in \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[ \end{cases}$$

On évalue  $f$  en  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  et on  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , on obtient

- $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\left(-\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$  et  $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_1 = \frac{2\pi}{3} + c_1$ . On en déduit que  $c_1 = -\pi$ .

- $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$  et  $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2 = -\frac{2\pi}{3} + c_2$ . On en déduit que  $c_2 = \pi$ .

Ainsi, on a

$$f(x) = \begin{cases} -2\arcsin(x) - \pi & \text{si } x \in \left] -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right[ \\ 2\arcsin(x) & \text{si } x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[ \\ -2\arcsin(x) + \pi & \text{si } x \in \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[ \end{cases}$$

En  $x = 1$ , on a  $f(1) = \arcsin(0) = 0$  et  $-2\arcsin(1) + \pi = -2 \times \frac{\pi}{2} + \pi = 0$

En  $x = -1$ , on a  $f(-1) = \arcsin(0) = 0$  et  $-2\arcsin(-1) - \pi = -2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \pi = 0$ .

Enfin, en  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on a bien

$$2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi = -2 \times \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{\pi}{2} = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

et de même en  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (heureusement vu que  $f$  est continue !!!).

On obtient donc

$$f(x) = \begin{cases} -2 \arcsin(x) - \pi & \text{si } x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ 2 \arcsin(x) & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ -2 \arcsin(x) + \pi & \text{si } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \end{cases}$$

**Correction 33** 1. La fonction est définie sur  $] -1, 1[$  et dérivable sur son domaine de définition. Pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , on a  $f'(x) = \arcsin'(x)$  donc il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in ] -1, 1[$ ,  $f(x) = \arcsin(x) + \alpha$ . Comme  $f(0) = 0 = \arcsin(0)$ , on en déduit que  $\alpha = 0$  donc  $\forall x \in ] -1, 1[$ ,  $f(x) = \arcsin(x)$ .

3. Soit  $x \in ] -1, 1[$ , alors il existe  $u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $x = \sin(u)$ . On a alors  $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos(u)$  car  $\cos$  est positif sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ . Ainsi,  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin(u)}{\cos(u)} = \tan(u) = \tan \arcsin(x)$ .

On a donc  $\tan(f(x)) = \tan(\arcsin(x))$  ce qui implique, par injectivité de  $\tan$  sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $f(x) = \arcsin(x)$ .

**Remarque.** On peut aussi montrer que l'égalité  $f(x) = \arcsin(x)$  est équivalente, en appliquant  $\tan$ , à  $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$  ce qui est toujours vrai, et conclure mais cela suppose que l'on connaît l'expression de  $f$ .

**Correction 34** 1. On peut faire deux études de fonctions:  $g : x \mapsto \frac{1}{1+x} - 1 + x$  dont la dérivée vaut

$$\forall x > 0, g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 = \frac{(1+x)^2 - 1}{(1+x)^2} \geq 0$$

et  $g(0) = 0$  donc  $g(x) \geq 0 \forall x > 0$ .

On pose  $f : x \mapsto g(x) - x^2$ . Pour tout  $x > 0$ , on a

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 - 2x = \frac{(1-2x)(1+x)^2 - 1}{(1+x)^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{(1+x)^2} \leq 0$$

et  $f(0) = 0$  donc  $f(x) \leq 0, \forall x > 0$ .

On a donc bien l'encadrement souhaité.

2. Le résultat précédent est vrai pour tout  $x > 0$ , il est donc vrai pour  $x^2 > 0$ . Soit  $x > 0$ . Pour tout  $t \in [0, x]$ , on a

$$1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 - t^2 + t^4,$$

donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^x 1 - t^2 dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_0^x 1 - t^2 + t^4 dt$$

d'où

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

3. On a

$$0 \leq \arctan(x) - x + \frac{x^3}{3} \leq \frac{x^5}{5}$$

donc

$$0 \leq \frac{\arctan(x) - x + \frac{x^3}{3}}{x^3} \leq \frac{x^2}{5}.$$

Par le théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x + \frac{x^3}{3}}{x^3} = 0,$$

donc on a bien  $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ .

**Correction 35** On a  $\cos(x) - 1 \rightarrow 0$  donc  $\sin(\cos(x) - 1) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1$  et  $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$  d'où  $\sin(\cos(x) - 1) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ .

On sait, de plus, que  $\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ . On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos(x) - 1)}{\sqrt{1+x^2} - 1} = -1.$$

**Correction 36** On a  $\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$  et  $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ . On en déduit que  $\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\cos(x) - 1} \underset{0}{\sim} -1$ , donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\cos(x) - 1} = -1.$$

**Correction 37** On commence par déterminer la limite de ce qu'il y a dans la parenthèse en calculant un équivalent du numérateur et du dénominateur. On écrit  $x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x}) = x^2 + o(x^2) - x\sqrt{x} + o(x\sqrt{x}) = -x\sqrt{x} + o(x\sqrt{x})$  donc  $x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x}) \sim -x\sqrt{x}$ , puis  $\sqrt{1+x} - \cos(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x}{2} + o(x)$ , on a donc  $\sqrt{1+x} - \cos(x) \sim \frac{x}{2}$ . On en déduit que

$$\frac{x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \cos x} \sim 2\sqrt{x},$$

donc la limite est nulle. Ainsi, on peut écrire :

$$\tan\left(\frac{x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \cos x}\right) \sim \frac{x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \cos x},$$

puis

$$\tan\left(\frac{x^2 e^x - \ln(1 + x\sqrt{x})}{\sqrt{1+x} - \cos x}\right) \sim 2\sqrt{x}.$$

**Correction 38** La fonction est définie pour tout  $x$  non nul tel que  $x(x+2)$  est positif donc sur  $] -\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$ . Elle est dérivable sur  $] -\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$  son domaine de définition et on a :

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \sqrt{x(x+2)} + \frac{2x+2}{2\sqrt{x(x+2)}}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x(x+2)}} e^{\frac{1}{x}}.$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

par croissances comparées et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-		-	+
$f(x)$	$+\infty$		$0$	$f(\sqrt{2})$	$+\infty$

**Correction 39** Elle est définie lorsque  $x^4 - x^3 \geq 0$  c'est-à-dire pour  $x \in ] -\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ . Elle est dérivable lorsque  $x^4 - x^3 > 0$  c'est-à-dire sur  $] -\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ . Pour tout  $x \in ] -\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ , on écrit :

$$g(x) = \exp \frac{1}{4} \ln(x^4 - x^3),$$

on a donc :

$$g'(x) = \frac{1}{4} \frac{4x^3 - 3x^2}{x^4 - x^3} \sqrt[4]{x^4 - x^3} = \frac{1}{4} \frac{4x - 3}{x^2 - x} \sqrt[4]{x^4 - x^3}.$$

Il n'y a pas de forme indéterminée dans les limites, on a donc le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$		-		+
$g$	$+\infty$		$0$	$1$

**Correction 40** Elle est bien définie et dérivable et sa dérivée vaut :

$$f'(x) = \left(-\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right) \exp(-x \ln(x+1)) = -\left(\frac{(x+1) \ln(x+1) + x}{(1+x)^{x+1}}\right).$$

La fonction est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Il n'y a pas de forme indéterminée pour les limites, on a donc le tableau de variations suivant :

$x$	$0$	$+\infty$
$f$	$1$	$0$

**Correction 41** On écrit :

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = x \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = x \left( 1 + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right) = \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = \frac{1}{3}.$$

**Correction 42** On passe à la forme exponentielle :  $x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ . Par le théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = 1$ .

**Correction 43** On passe à la forme exponentielle :  $x^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x} \ln(x))$ . Par le théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = 1$ .

**Correction 44** On passe à la forme exponentielle :  $x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ . Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty, \text{ on en déduit que } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0.$$

**Remarque.** Ici, pas de forme indéterminée donc pas besoin d'invoquer le théorème de croissances comparées.

**Correction 45** Par le théorème de croissances comparées, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}} = 0$ .

**Correction 46** Par le théorème de croissances comparées, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0$ .

**Correction 47** On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{x^2} = 0$ .

**Remarque.** À nouveau ici, pas de forme indéterminée.

**Correction 48** On a  $2 > 1$  donc, par le théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^x}{x^3}\right) = +\infty$ .

**Correction 49** On a  $\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2} = \ln(x+3)e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-x}x^2}$ . Par le théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}x^2 = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}x^2} = 1$ . On a donc

$\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2} \sim \ln(x+3)e^{-x}$ . On peut faire mieux en écrivant  $\ln(x+3)e^{-x} = e^{-x} \ln(x) \left(1 + \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right)$ , on a donc  $\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2} \sim e^{-x} \ln(x)$ .

Par le théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)e^{-x} = 0$ , on en déduit que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2} = 0$ , on peut donc écrire

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right)\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right) - 1\right)}_{\rightarrow 0}\right),$$

on a donc

$$\ln\left(\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right)\right) \sim \cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right) - 1,$$

puis, toujours parce que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2} = 0$ ,

$$\sim \frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2},$$

puis

$$\cos\left(\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right)^2.$$

Enfin, en utilisant l'équivalent trouvé au début, on a

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x+3)}{e^x + x^2}\right)^2 \sim -\frac{1}{2} \ln(x)e^{-x}.$$

**Correction 50** On a  $\tan(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$  donc :

$$\tan(x) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Quand  $x$  tend vers 0, le dénominateur tend vers 1 et le numérateur tend vers 0 par le théorème de croissances comparées. En passant à l'exponentielle, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\tan x} = 1.$$

**Correction 51** On a :

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = x \ln(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \ln x(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2\sqrt{x} = x \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc 1 et 4.

**Correction 52** On a  $e^x + e^{1-x} = e + 1 \Leftrightarrow e^x + \frac{e}{e^x} = e + 1$ . On pose  $X = e^x$ , on a alors  $X^2 - (1+e)X + e = 0$ , le discriminant  $\Delta = (1+e)^2 - 4e$  donc il y a deux racines mais une seule positive:  $\frac{e}{2}$ , la solution recherchée est donc  $x$  tel que  $e^x = \frac{e}{2}$  soit  $x = 1 - \ln 2$ .

**Correction 53** On a  $x = \frac{1}{2}$  racine évidente et en cherchant encore,  $x = \frac{1}{4}$ . On pose  $f : x \mapsto x^x = \exp(x \ln(x))$ . La fonction  $f$  est dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $f'(x) = (\ln(x) + 1)x^x$ . On a donc le tableau de variations suivant :

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f$	1	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$+\infty$

On a  $\frac{1}{4} \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$  et  $f$  est strictement décroissante donc injective sur cet intervalle,  $\frac{1}{4}$  est l'unique solution sur cet intervalle. On a également  $\frac{1}{2} \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$  et  $f$  est strictement croissante donc injective sur cet intervalle,  $\frac{1}{2}$  est l'unique solution sur cet intervalle.

On en déduit que  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{4}$  sont les deux seules solutions de cette équation.

**Correction 54** La racine carrée est définie pour  $x^2 - 1 \geq 0$  c'est-à-dire  $|x| \geq 1$ . Pour  $x \leq -1$ , on a  $x = -\sqrt{x^2}$  donc  $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$  et le  $\ln$  n'est pas défini. Pour  $x \geq 1$ , on a  $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$  donc le logarithme est bien défini. On écrit :

$$\begin{aligned} & \text{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{x + \sqrt{x^2 - 1}} + e^{-x - \sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{e^{x + \sqrt{x^2 - 1}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x - \sqrt{1 - x^2}}{x^2 - (x^2 - 1)} \right) \text{ en multipliant par la quantité conjuguée} \\ &= \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1} + x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= x \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\text{ch}(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})) = x$

**Correction 55** On raisonne par équivalence :

$$\text{ch}(x) = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0.$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 en  $e^x$  dont le discriminant vaut 12. Il possède deux racines positives  $2 \pm \sqrt{3}$ , les solutions sont donc  $\ln(2 \pm \sqrt{3})$ .

**Correction 56** On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} 3\text{ch}(x) + 2\text{sh}(x) = 3 & \Leftrightarrow 3(e^x + e^{-x}) + 2(e^x - e^{-x}) \\ & \Leftrightarrow 5e^x + e^{-x} - 6 = 0 \\ & \Leftrightarrow 5e^{2x} - 6e^x + 1 = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme de degré 2 en  $e^x$  dont le discriminant vaut 16. Il y a deux racines : 1 et  $\frac{1}{5}$  donc les solutions sont  $x = 0$  et  $x = -\ln(5)$ .

**Correction 57** On a :

$$\begin{aligned} 2\text{sh}(x) + \text{ch}(x) = 5 \\ \Leftrightarrow 2e^x - 2e^{-x} + e^x + e^{-x} = 6 \\ \Leftrightarrow 3e^{2x} - 6e^x - 1 = 0 \text{ en multipliant par } e^x \end{aligned}$$

On reconnaît alors un polynôme de degré 2 en  $e^x$  dont le discriminant vaut 48. Les racines de  $3X^2 - 6X - 1$  sont  $\frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$ . L'exponentielle étant toujours strictement positive, l'unique solution est  $e^x = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$  d'où  $x = \ln\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$ .

**Correction 58** On sait que  $\text{ch}(x) \geq \text{ch}(0)$  par parité de la fonction  $\text{ch}$  donc l'équation n'a pas de solution pour  $a < 1$ . Si  $a \geq 1$ , on passe à l'expression exponentielle et on cherche à résoudre  $e^x + e^{-x} = 2a$  ou encore  $e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0$ . On calcule le discriminant de ce polynôme de degré 2 en  $e^x$ , on trouve  $4(a^2 - 1)$ . Il est positif ou nul, les racines de ce polynôme sont donc  $\frac{2a \pm 2\sqrt{a^2 - 1}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ . On en déduit que l'équation  $\text{ch}(x) = a$  admet comme solutions  $\ln(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$  (et cette solution est unique si  $a = 1$ ).

**Correction 59** On raisonne par équivalence :

$$\text{sh}(x) = a \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2a \Leftrightarrow e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0.$$

Le polynôme de degré 2 en  $e^x$  a pour discriminant  $4a^2 + 4$ . Il est strictement positif donc le polynôme a deux racines distinctes :  $\frac{2a \pm 2\sqrt{a^2 + 1}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 + 1}$ . Comme  $a - \sqrt{a^2 + 1} < 0$ , on ne peut avoir  $e^x = a - \sqrt{a^2 + 1}$  donc l'unique solution de l'équation est  $\ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ .

**Remarque.** L'application  $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  est l'expression de la bijection réciproque de  $\text{sh}$ .

**Correction 60** On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) = a \text{ch}(x) &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = a(e^x + e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow (1-a)e^x = (1+a)e^{-x} \\ &\Leftrightarrow (1-a)e^{2x} = 1+a. \end{aligned}$$

Si  $a = 1$ , il n'y a pas de solution. Si  $a \neq 1$ , on doit résoudre  $e^{2x} = \frac{1+a}{1-a}$ . Il faut que  $\frac{1+a}{1-a}$  soit strictement positif, ce qui est équivalent à  $(1+a)(1-a) > 0$ , on doit donc avoir  $a \in ]-1, 1[$ . Si  $a \in ]-1, 1[$ , on a  $2x = \ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$  d'où  $x = \ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$ .

**Correction 61** On sait que  $\sqrt{1+x^2} \geq |x|$  donc  $\sqrt{1+x^2} \geq x$  et  $\sqrt{1+x^2} \geq -x$ . Les expressions sont donc définies pour tout  $\mathbb{R}$ . On remarque ensuite, grâce à la quantité conjuguée, que

$$x + \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}$$

d'où l'égalité en appliquant  $\ln$ .

**Remarque.** On peut aussi écrire directement :

$$\begin{aligned} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) &= \ln((x + \sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2} - x)) \\ &= \ln((\sqrt{1+x^2})^2 - x^2) = \ln(1) = 0. \end{aligned}$$

**Correction 62** Elle est définie sur tout  $\mathbb{R}$  car  $\text{ch}$  ne s'annule pas. De plus, elle est impaire en tant que quotient d'une fonction impaire et d'une fonction paire. Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tanh'(x) = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

La fonction est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque.** On a également,  $\forall x \in \mathbb{R}, \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$ .

Pour le calcul des limites, on écrit :

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}},$$

on a alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = 1$  puis, par imparité de la fonction,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1$ .

**Correction 63** 1. On sait que  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$  donc :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \text{ch}^2(x) - 1 - \text{ch}(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{ch}^2(x) - \text{ch}(x) - 2 = 0.$$

On pose  $X = \text{ch}(x)$ , alors :

$$X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = 2$$

Comme  $\text{ch}(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , on ne peut avoir  $\text{ch}(x) = -1$ , donc :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \text{ch}(x) = 2.$$

Il suffit donc de résoudre  $\text{ch}(x) = 2$ . On a :

$$\text{ch}(x) = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0.$$

On pose  $Y = e^x$ , alors  $Y^2 - 4Y + 1 = 0$  a pour racine  $Y = 2 \pm \sqrt{3}$ , ce qui implique  $x = \ln(2 \pm \sqrt{3})$ . Les solutions de  $g(x) = 0$  sont donc  $\ln(2 \pm \sqrt{3})$ .

2. La fonction  $g$  est dérivable sur tout  $\mathbb{R}$  de dérivée :

$$g'(x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = \text{sh}(x)(2\text{ch}(x) - 1).$$

Comme  $\text{ch}(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$2\text{ch}(x) - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

et le signe de  $g'(x)$  dépend donc du signe de  $\text{sh}(x)$ . Ainsi,

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

On a le tableau de variations suivant :

	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g$	$+\infty$	$-2$	$+\infty$

3. On a  $g(0) = -2 \leq 0$  donc  $-2$  répond à la question.

**Correction 64** On pose  $f : x \mapsto e^{\text{sh}(x)} - 1 - x$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \text{ch}(x)e^{\text{sh}(x)} - 1.$$

Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $\text{sh}(x) \geq 0$  donc  $e^{\text{sh}(x)} \geq 1$  et comme on a également :  $\forall x \geq 0, \text{ch}(x) \geq 1$ , on en déduit que  $\forall x \geq 0, f'(x) \geq 0$ . La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . On a  $f(0) = 0$ , on peut donc affirmer, comme  $f(0) = 0$ , que :

$$\forall x > 0, f(x) > 0,$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée.