Correction du TD n 7

Correction 1 $\int^t \mathrm{ch}x\mathrm{sh}^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{sh}^4 t.$

Correction 2 $[\arcsin t]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

Correction 3 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $-\frac{u'}{u^3}$, on a donc $\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\cos^2(x)}$

Remarque. *On peut aussi écrire* $\frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} = \frac{\tan(t)}{\cos^2 t}$ *qui est de la forme $u'.u$, on a donc* $\int^x \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\tan^2 x$*. Attention, on trouve alors une autre primitive (égale à la précédente à constante près !).*

.

Correction 4 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$

Correction 5 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$

Correction 6 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \,\mathrm{d}t = -\left[\ln(\cos t)\right]_0^{\frac{pi}{4}} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right).$

Correction 7 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $u'.u^3$, on a donc :

$$\int^t \sin^3 x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 t.$$

Correction 8 On écrit : $\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} = \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin^5 x} = \frac{\cos x}{\sin^5 x} - \frac{\cos x}{\sin^3 x}$. On a donc :

$$\int^t \frac{\cos^3 x \,\mathrm{d}x}{\sin^5 x} = \frac{-1}{4\sin^4 t} + \frac{1}{2\sin^2 t} = \frac{2\sin^2 t - 1}{4\sin^4 t}.$$

Correction 9 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $u'.u$. On a $\int^x \cos t \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin^2 x$ (ou $-\frac{1}{2}\cos^2 x$).

Correction 10 On écrit $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$. On a donc $\int^t \sin^2(t)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

Correction 11 On écrit $\sin^2 x \cos^3 x = \sin^2 x \cos x(1-\sin^2 x) = \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x$. On a alors : $\int^t \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int^t \cos x \sin^2 x \,\mathrm{d}x - \int^t \cos x \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{1}{5}\sin^5 t.$

Correction 12 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$

Correction 13 On écrit :

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{t+1-2}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}.$$

On a donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [t - 2\ln|t+1|]_0^1 = 1 - 2\ln(2).$$

Correction 14 On écrit :

$$\frac{2t}{t+2} = \frac{2t+4-4}{t+2} = 2 - \frac{4}{t+2}$$

d'où

$$\int_1^2 \frac{2t}{t+2}dt = [2t - 4\ln|t+2|]_0^1 = 2 - 4\ln(3) + 4\ln(2)$$

Correction 15 On écrit $\frac{t}{1+2t} = \frac{(2t+1)-1}{2(1+2t)}$. On a alors :

$$\int^x \frac{t}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \int^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+2t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln|1+2x|.$$

Correction 16 On écrit $\frac{1}{e^t+1} = \frac{e^t+1-e^t}{e^t+1} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$. Le deuxième terme est de la forme $\frac{u'}{u}$, on a donc $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1} = x - \ln(1+e^x)$.

Correction 17 On écrit :

$$\int^t \frac{1+e^x \,\mathrm{d}x}{1-e^x} = \int_0^t \frac{2e^x+1-e^x}{1-e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{2e^x}{1-e^x} + 1\right)\mathrm{d}x = -2\ln|e^t - 1| + t.$$

Correction 18 On pose $u=\ln(t)$, on a $\mathrm{du}=\dfrac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}}$. Comme t varie de 1 à e^{π}, u varie de 0 à π. On obtient

$$\int_1^{e^{\pi}}\sin(\ln t)\mathrm{dt}=\int_0^{\pi}\mathrm{e^u}\sin(\mathrm{u})\mathrm{du}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}.$$

Correction 19 On fait une double intégration par partie : $\int^t(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x=\arcsin^2 t+2\arcsin t\sqrt{1-t^2}-2t$.

Correction 20 $\int^x t\arctan t\,\mathrm{dt}=\dfrac{x^2}{2}\arctan x-\int_0^x\dfrac{t^2}{2(1+t^2)}\,\mathrm{dt}=\dfrac{x^2}{2}\arctan x+\dfrac{1}{2}\arctan x-\dfrac{x}{2}$.

Correction 21 $\int^x(t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{dt}=(x+1)\mathrm{sh}x-\int_0^x\mathrm{sh}t\,\mathrm{dt}=(x+1)\mathrm{sh}x-\mathrm{ch}x$.

Correction 22 On fait une intégration par parties avec $u=\arctan t, v'=1$ donc $v=t$ et $u'=\dfrac{1}{1+t^2}$. On a $\int_0^1\arctan t=[t\arctan t]_0^1-\dfrac{t}{1+t^2}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

Correction 23

1. On pose $t=\ln(x)$, on a donc $dt=\dfrac{1}{x}dx$ donc $dx=e^t dt$. x varie de 1 à e donc t varie de 0 à 1. On a donc

$$I_n=\int_0^1 e^t t^n\,\mathrm{dt}$$

2. Pour tout $t\in[0,1]$, $e^t\in[1,e]$ donc $t^n\leqslant e^t t^n\leqslant e.t^n$. Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_0^1 t^n\,\mathrm{dt}\leqslant I_n\leqslant e.\int_0^1 t^n\,\mathrm{dt}$$

donc

$$\frac{1}{n+1}\leqslant I_n\leqslant\frac{e}{n+1}$$

et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente par le thm des gendarmes: elle converge vers 0.

3. On fait une intégration par partie, on trouve

$$I_{n+1}=\left[t^{n+1}e^t\right]_0^1-(n+1)\int_0^1 e^t t^n\,\mathrm{dt}=e-(n+1)I_n.$$

4. D'après la question précédente, on a $nI_n=-I_{n+1}+e-I_n$. d'après la question 2, $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0=\lim\limits_{n\to+\infty}I_{n+1}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=e$.

Correction 24

1. Soit $n\geqslant 2$, alors en faisant deux intégrations par parties, on trouve

$$I_n=n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}-n(n-1)I_{n-2}.$$

Pour $n\geqslant 4$, on a donc

$$I_n=n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}-n(n-1)n(-2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3}+n(n-1)(n-2)(n-3)I_{n-4}$$

Par récurrence descendante, on obtient, :

$$I_{2p}=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-(2k+1)}\frac{(2p)!}{(2p-(2k+1))!}+(-1)^p(2p)!I_0,$$

et

$$I_{2p}=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p-2k}\frac{(2p+1)!}{(2p-2k)!}+(-1)^p(2p+1)!I_1,$$

avec $I_0=I_1=1$.

Correction 25

1. On pose $v'(t)=t^p$ et $u(t)=(1-t)^q$. On a $u'(t)=-q(1-t)^{q-1}$ et $v(t)=\dfrac{1}{p+1}t^{p+1}$. On a donc

$$I(p,q)=\left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1}\right]_0^1+\frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{dt}=\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$$

2. On a $I(p,q)=\dfrac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$ donc

$$I(p+1,q-1)=\frac{p+1}{q}I(p,q)=\frac{p+1}{q}\frac{p}{q+1}I(p-1,q+1),$$

et, par récurrence descendante :

$$I(p+1,q-1)=\frac{p+1}{q}\times\frac{p}{q+1}\times\ldots\times\frac{1}{q+p}I(0,q+p).$$

Comme $I(0,q+p)=\int_0^1(1-t)^{q+p}\,\mathrm{dt}=\left[-\dfrac{(1-t)^{q+p+1}}{q+p+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{p+q+1}$, on obtient:

$$I(p+1,q-1)=\frac{p+1}{q}\times\frac{p}{q+1}\times\ldots\times\frac{1}{q+p}\times\frac{1}{q+p+1}=\frac{(p+1)!}{\prod_{k=q+1}^{q+p+1}k},$$

donc

$$I(p+1,q-1)=\frac{(p+1)!(q-1)!}{(p+q+1)!}.$$

On en déduit que

$$I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3. PB d'énoncé, il faut que je retrouve l'énoncé original !

Correction 26 On écrit $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2(1+x)}+\dfrac{1}{2(1-x)}$. On en déduit que

$$\int\frac{1\,\mathrm{d}x}{1-x^2}=\int\left(\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln|1-x|=\ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}.$$

Correction 27 On écrit :

$$\frac{t+1}{t(1-t)}=\frac{-(t-1)+2t}{}=\frac{1}{t}-\frac{2}{t-1}.$$

On a donc $\int\dfrac{(t+1)dt}{t(1-t)}=\ln|x|-\ln((x-1)^2)=\ln\left|\dfrac{x}{(x-1)^2}\right|$.

Correction 28 On a $\dfrac{1}{t^2-4t+4}=\dfrac{1}{(t-2)^2}$ d'où $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-4t+4}=-\frac{1}{t-2}$.

Correction 29 On écrit $\dfrac{x^2+2x}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{x^2+1-1}{1+x^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}=1-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}$.

On a donc $\displaystyle\int\frac{x^2+2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=x-\arctan(x)+\ln(1+x^2)$.

Correction 30 On a $t^2-2t-3=(t+1)(t-3)$ d'où $\dfrac{1}{t^2-2t-3}=\dfrac{1}{4(t-3)}-\dfrac{1}{4(t+1)}$. On écrit alors

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t-3}=\int\frac{\mathrm{d}t}{4(t-3)}-\int\frac{\mathrm{d}t}{4(t+1)}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-3}{t+1}\right|.$$

Correction 31 On écrit $\dfrac{1}{t^2+t}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}$ puis on intègre :

$$\int\frac{1\,\mathrm{d}t}{t^2+t}=\ln|t|-\ln|t+1|.$$

Correction 32 On écrit $\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{(x+1)^2+1}$. On a alors $\int\dfrac{1}{x^2+2x+2}=\arctan(x+1)$.

Correction 33 On écrit $\dfrac{1}{x^2+3}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(x/\sqrt{3})^2+1}$. On pose $u=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $dx=\sqrt{3}du$ donc $\int\dfrac{1}{x^2+3}dx=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\int\dfrac{du}{u^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan(u)=\dfrac{\arctan(x/\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Correction 34 On écrit

$$\begin{aligned}1+x+x^2&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\\&=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right)\\&=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)\end{aligned}$$

On pose $u=\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, on a $du=\dfrac{2}{\sqrt{3}}dx$ donc $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}du$ d'où

$$\begin{aligned}\int\frac{2}{x^2+x+1}dx&=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{du}{u^2+1}\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(u)\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

Correction 35 On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont $t\mapsto\lambda e^t,\lambda\in\mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous forme polynomiale $y_p:t\mapsto at^2+bt+c$. On a $y_p'(t)=2at+b$ donc y_p est solution si et seulement si $2at+b-at^2-bt-c=t^2$. On identifie les coefficients des deux membres et on résout le système:

$$\begin{cases}-a= & 1\\ 2a-b= & 0.\\ b-c= & 0\end{cases}$$

On trouve $y_p:t\mapsto-(t^2+2t+2)$, les solutions de l'équation sont donc $t\mapsto\lambda e^t-(t^2+2t+2),\lambda\in\mathbb{R}$.

Correction 36 On travaille sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{3x}{1+x^2}$ est $x\mapsto\dfrac{3}{2}\ln(1+x^2)$; Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $x\mapsto\lambda\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}},\lambda\in\mathbb{R}$.

Correction 37 On travaille sur un intervalle sur lequel $x\mapsto x(x-1)$ ne s'annule pas. On pose $I_1=]-\infty,0[$, $I_2=]0,1[$ et $I_3=]1,+\infty[$. On travaille sur I_i. Pour trouver les solutions de l'équation homogène associée, on doit déterminer une primitive de $\dfrac{x+1}{x(1-x)}$ ce que l'on a fait à l'exercice 27. On a $\int^x\dfrac{(t+1)dt}{t(1-t)}=\ln\left|\dfrac{x}{(x-1)^2}\right|$. On en déduit que les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{(x-1)^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On remarque que la solution égale à $x \mapsto \frac{x}{2}$ est une solution évidente.

Les solutions, sur I_i, de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{(x-1)^2} + \frac{x}{2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque. *Si on ne voit pas la solution évidente, on peut la trouver par la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière sous la forme* $y_p(x) = \frac{\lambda(x)x}{(x-1)^2}$. *La fonction* y_p *est solution de l'équation si et seulement si* $\frac{\lambda'(x)x^2}{x-1} = x^2$ *ce qui est vrai lorsque* $\lambda(x) = \frac{(x-1)^2}{2}$. *On retrouve la solution particulière* $x \mapsto \frac{x}{2}$.

Si on intègre $\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$, *on va se retrouver avec* $y_p(x) = \frac{(x^2-2x)x}{2(x-1)^2}$. *ce qui est correct (mais moins joli) puisque l'on a*

$$\frac{(x^2-2x)x}{2(x-1)^2} = \frac{(x^2-2x+1)x - x}{2(x-1)^2} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2(x-1)^2},$$

avec $x \mapsto \frac{-x}{2(x-1)^2}$ *solution de l'équation homogène.*

Correction 38 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto e^x - 1$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^*$. On travaille sur I_i. On commence par chercher les solutions de l'équation homogène associée. Pour cela, il faut déterminer une primitive de $\frac{1+e^x}{1-e^x}$ ce que l'on a fait à l'exercice 25. On a:

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = -2\ln|e^x - 1| + x.$$

Les solutions, sur I_i, de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda e^x}{(1-e^x)^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière, on procède par la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{\lambda(x)e^x}{(e^x-1)^2}$.

y_p est solution si et seulement si $(e^x-1)\frac{\lambda'(x)e^x}{(e^x-1)^2} = e^x + 2$ c'est-à-dire :

$$\lambda'(x)e^x = (e^x+2)(e^x-1) = e^{2x} + e^x - 2,$$

soit encore :

$$\lambda'(x) = e^x + 1 - 2e^{-x}.$$

On a donc : $\lambda(x) = e^x + x + 2e^{-x}$ et $y_p(x) = \frac{e^{2x} + xe^x + 2}{(e^x-1)^2}$. Les solutions de l'équation, sur I_i, sont :

$$x \mapsto \frac{\lambda e^x + e^{2x} + xe^x + 2}{(1-e^x)^2} +, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Correction 39 On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{x^2/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Une solution évidente est $x \mapsto e^{x^2}$ donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto e^{x^2} + \lambda e^{x^2/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. *Si on ne voit pas la solution évidente, on peut procéder par la méthode de la variation de la constante et chercher une solution particulière sous la forme* $\lambda(x)e^{\frac{x^2}{2}}$. *On trouve* $\lambda'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$. *On reconnaît une fonction de la forme* $u'e^u$ *donc* $\lambda(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ *et une solution particulière est* $y_p(x) = e^{\frac{x^2}{2}}e^{\frac{x^2}{2}} = e^{x^2}$.

Correction 40 On travaille sur un intervalle sur lequel sin ne s'annule pas. On pose $I_i =]i\pi, (i+1)\pi[$, $i \in \mathbb{Z}$. Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x \mapsto \lambda_i \sin x$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda(x)\sin(x)$. On trouve $\lambda'(x) = 1$ donc $\lambda(x) = x$ et $y_p(x) = x\sin(x)$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions $x \mapsto (\lambda_i + x)\sin x$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 41 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^\star$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^\star$; Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x \mapsto \lambda_i x^2$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Une solution évidente est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda_i x^2 + \frac{x^4}{2}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 42 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x(1+x^2)$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^\star$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^\star$. On écrit $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)}$ est $x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Les solutions sur I_i sont alors : $x \mapsto \frac{\lambda_i x}{\sqrt{1+x^2}}, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

Correction 43 On travaille sur $\mathbb{R}$. On écrit $\frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 1 - \frac{2x}{1+x^2}$, une primitive de $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ est donc $x \mapsto x - \ln(1+x^2)$.

Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \lambda e^{-x}(1+x^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 : $y_p(x) = ax + b$. On a y_p solution si et seulement si $a(x^2+1) + (x-1)^2(ax +$

$b) = x^3 - x^2 + x + 1$. En développant et en identifiant les coefficients des deux membres on trouve $y_p(x) = x + 1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions : $x \mapsto \lambda e^{-x}(1+x^2) + x + 1, \lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 44 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x$ ne s'annule pas. On pose $I_1 = \mathbb{R}_+^\star$ et $I_2 = \mathbb{R}_-^\star$. Les solutions de l'équation homogène sur I_i sont $x \mapsto \dfrac{\lambda_i}{x}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto \dfrac{\lambda'(x)}{x}$. On a alors $\lambda'(x) = \cos(x)$ d'où $\lambda(x) = \sin(x)$. Les solutions sur I_i sont $x \mapsto \dfrac{\lambda_i + \sin(x)}{x}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Correction 45 On travaille sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\cos(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme y_p : $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\cos(x)}$. On trouve $\lambda'(x) = 1$ donc $\lambda(x) = x$. Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{\cos(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut $y(0) = 1$, on doit donc prendre $\lambda = 1$ et l'unique solution cherchée est $x \mapsto \dfrac{1+x}{\cos(x)}$.

Correction 46 On travaille sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda\cos(x), \lambda \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $x \mapsto \lambda(x)\cos(x)$, ce qui implique $\lambda'(x) = \cos(x)$ donc $\lambda(x) = \sin(x)$. Une solution particulière est $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$. L'ensemble des solutions est :

$$\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \sin(x)\cos(x), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Correction 47 1. On cherche une solution polynômiale. Si $a_m x^m$ est le terme dominant du polynôme, on doit avoir $a_m.mx^{m-1}x^2 - 3xa_m x^m = 0$ (puisque le second membre est une constante). Cela impose $m = 3$. On cherche maintenant une solution sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. On dérive et on injecte dans l'équation puis on identifie au polynôme constant égal à 1. On obtient le système :

$$\begin{cases} -b & = 0 \\ 3a - 2c & = 0 \\ 2b - 3d & = 0 \\ c & = 1 \end{cases}.$$

On obtient $b = d = 0$, $c = 1$ et $a = \frac{2}{3}$. Une solution particulière est donc $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + x$.

2. On travaille sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène sont $\lambda(1+x^2)^{3/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{x \mapsto \lambda(1+x^2)^{3/2} + \frac{2x^3}{3} + x, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Correction 48 On travaille sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x(x^2-1)$ ne s'annule pas. On pose $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ et $I_4 =]1, +\infty[$.

On a $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}$, donc

$$\int \frac{2dx}{x(x^2-1)} = -2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| = \ln\left(\frac{|x^2-1|}{x^2}\right).$$

Les solutions de l'équation homogène sur I_i, $i = 1..4$, sont

$$x \mapsto \frac{\lambda_i x^2}{x^2-1}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante sous la forme $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)x^2}{x^2-1}$. Cela impose $y_p'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $y_p(x) = \dfrac{\ln|x|x^2}{x^2-1}$. Les solutions sur I_i sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda_i x^2 + x^2\ln|x|}{x^2-1}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Correction 49 L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet 1 et 2 pour racine donc les solutions de l'équation homogène sont :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Une solution particulière est $y = \dfrac{1}{2}$, les solutions sont donc :

$$x \mapsto \frac{1}{2} + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$. Par identification, on a $6a = 1, 6b - 5a = -1$. On trouve $a = \dfrac{1}{6}$ et $b = -\dfrac{1}{36}$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \left(\frac{x}{6} - \frac{1}{36}\right)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. On cherche une solution particulière sous la forme $x(ax+b)e^{2x}$. Par identification, on a $2a = 1$ et $2a + b = 1$. On trouve $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$. Les solutions sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{x^2}{2}e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

4. On cherche une solution particulière sous la forme $\alpha\cos x+\beta\sin x$. Par identification, on trouve $\beta+3\alpha=1$ et $\alpha-3\beta=0$. On a donc $\alpha=\dfrac{3}{10}$ et $\beta=\dfrac{1}{10}$. Les solutions sont donc les fonctions :
$$x\mapsto \lambda e^{x}+\mu e^{2x}+\frac{3}{10}\cos(x)+\frac{1}{10}\sin(x),(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

Correction 50 Les solutions de l'équation caractéristique sont $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation homogène sont $x\mapsto e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)+\beta\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

1. Une solution évidente est la solution constante égale à 1, les solutions sont donc :
$$x\mapsto 1+e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x)=(ax+b)e^{-2x}$. On a $y_p'(x)=(-2ax+a-2b)e^{-2x}$ et $y_p"(x)=(4ax+4b-4a)e^{-2x}$. La fonction y_p est solution de l'équation si et seulement si $(3ax+3b-3a)e^{-2x}=xe^{-2x}$. On résout le système obtenu en identifiant les coefficients et on trouve $a=b=\dfrac{1}{3}$, les solutions sont donc :
$$x\mapsto \frac{1}{3}(x+1)e^{-2x}+e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

3. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x)=ax^2+bx+c$. On a $y_p'(x)=2ax+b$ et $y_p"(x)=2a$. La fonction y_p est solution de l'équation si et seulement si $ax^2+(b+2a)x+c+b+2a=x^2+3x+4$. On identifie les coefficients des deux membres et on trouve $a=b=c=1$ dont les solutions sont :
$$x\mapsto x^2+x+1+e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

4. On pose $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On remarque qu'une fonction z à valeurs complexes est solution de $z"(x)+z'(x)+z(x)=e^{jx}$ si et seulement si sa partie réelle est solution de $y"(x)+y'(x)+y(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$. Nous allons donc résoudre l'équation différentielle complexe. On remarque que j est solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière sous la forme $z_p(x)=axe^{jx}$. On a $z_p'(x)=(a+jax)e^{jx}$ et $z"_p(x)=(j^2ax+2ja)e^{jx}$. On a :
$$\begin{aligned} z_p"(x)+z_p'(x)+z_p(x)=e^{jx} &\Leftrightarrow \left((j^2a+ja+a)x+(a+2ja)\right)e^{jx}=e^{jx}\\ &\Leftrightarrow (a+2ja)e^{jx}=e^{jx}\text{car } 1+j+j^2=0 \text{ d'après les propriétés} \end{aligned}$$
On en déduit que $a=\dfrac{1}{1+2j}=\dfrac{1}{i\sqrt{3}}=-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$.

On a donc $z_p(x)=-\dfrac{i}{\sqrt{3}}e^{jx}$, on en déduit qu'une solution particulière de l'équation $y"(x)+y'(x)+y(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ est $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ et les solutions sont:
$$x\mapsto \frac{x}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-x/2}+e^{-x/2}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Correction 51 L'équation caractéristique a pour racine $-1\pm 2i$, les solutions de l'équation homogène sont donc :
$$x\mapsto e^{-x}\left(\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)\right),(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. On trouve $x-\dfrac{2}{5}$. Les solutions sont donc :
$$x\mapsto x-\frac{2}{5}+e^{-x}\left(\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)\right),(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

Correction 52 Les racines de l'équation caractéristique sont -1 et $\dfrac{1}{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc :
$$x\mapsto \alpha e^{-x}+\beta e^{x/3},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$
On cherche une solution particulière sous la forme $\alpha\cos x+\beta\sin x$. On trouve $\alpha=\dfrac{1}{5}$ et $\beta=-\dfrac{1}{10}$. Les solutions sont donc :
$$x\mapsto \frac{1}{5}\cos x-\frac{1}{10}\sin x+\alpha e^{-x}+\beta e^{x/3},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$
On peut également préférer chercher une solution particulière complexe de l'équation $-3z"-2z'+z=e^{ix}$. On cherche z_p sous la forme $z_p(x)=\lambda e^{ix}$, on a z_p solution si et seulement si $(3-2i+1)\lambda=1$ donc $\lambda=\dfrac{1}{4-2i}=\dfrac{2+i}{10}$ et $z_p(x)=\dfrac{2+i}{10}e^{ix}=\dfrac{1}{10}\left(2\cos(x)-\sin(x)+i\cos(x)+2i\sin(x)\right)$ Une solution particulière de $-3y"-2y'+y=\cos(x)$ est la partie réelle de $z_p(x)$ soit $y_p=\dfrac{1}{10}\left(2\cos(x)-\sin(x)\right)$. On retrouve bien la même solution particulière.

Correction 53 L'équation caractéristique est $r^2+2r-3=0$ donc les racines sont 1 et -3 donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2+bx+c$. On a $y_p'(x) = 2ax+b$ et $y_p"(x) = 2a$. La fonction y_p est solution si et seulement si

$$-3ax^2 + (4a-3b)x + 2a + 2b - 3c = x^2$$

ce qui impose $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{9}$ et $c = -\frac{14}{27}$. Les solutions sont donc les fonctions

$$x \mapsto -\frac{x^2}{3} - \frac{4x}{9} - \frac{14}{27} + \lambda e^x + \mu e^{-3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 54 On procède par disjonction de cas :

- Si $a=0$, alors $y"=0$ et les solutions sont les fonctions affines $x \mapsto ax+b, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $a<0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes : $\pm\sqrt{-a}$. Les solutions sont donc les fonctions
$$x \mapsto \lambda e^{\sqrt{-a}x} + \mu e^{-\sqrt{-a}x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
- Enfin, si $a>0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\pm i\sqrt{a}$, les solutions sont alors les fonctions
$$x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{a}x) + \mu \sin(\sqrt{a}x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 55 L'équation caractéristique $r^2+r-2=0$ admet pour racines 1 et 2. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que z_p est une solution particulière (complexe) de l'équation $z" + z' - 2z = 2e^{ix}$ si et seulement si sa partie imaginaire y_p est une solution particulière de $y" + y' - 2y = 2\sin x$. Cherchons une solution particulière de l'équation complexe sous la forme $z_p : x \mapsto \alpha e^{ix}$ puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $z_p'(x) = i\alpha e^{ix}$ et $z"_p(x) = -\alpha e^{ix}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $(-\alpha + i\alpha - 2\alpha)e^{ix} = 2e^{ix}$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{2}{i-3}$.

Déterminons maintenant la partie imaginaire de la fonction $z_p : x \mapsto \frac{2}{i-3}e^{ix}$. On écrit

$$\frac{2}{i-3}e^{ix} = -\frac{3+i}{5}e^{ix},$$

on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{3}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{3}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 56 L'équation caractéristique $r^2+4r+4=0$ admet -2 pour racine double, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto x^2(ax)e^{-2x}$ car -2 est une racine double de l'équation caractéristique. On a $y_p'(x) = (-2ax^3 + 3ax^2)e^{-2x}$ et $y_p"(x) = (4ax^3 - 12ax^2 + 6ax)e^{-2x}$. La fonction y_p est solution si et seulement si $6ax = x$ ce qui impose $a = \frac{1}{6}$. Ainsi, une solution particulière de l'équation est $y_p : x \mapsto \frac{x^3}{6}e^{-2x}$ et les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{x^3}{6}e^{-2x} + (\lambda + \mu x)e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 57 L'équation caractéristique $r^2 + r = 0$ a pour racines 0 et -1, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto (ax+b)e^x$. On a $y_p'(x) = (ax+a+b)e^x$ et $y"_p(x) = (ax+2a+b)e^x$. La fonction y_p est donc solution de l'équation si et seulement si $(3a+2b+2ax)e^x = 2xe^x$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} 3a+2b &= 0 \\ 2a &= 1 \end{cases}$$

On trouve $a=1$ et $b = -\frac{3}{2}$. Une solution particulière est donc $x \mapsto \left(x - \frac{3}{2}\right)e^x$ et les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto \left(x - \frac{3}{2}\right)e^x + \lambda + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 58 L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, mu) \in \mathbb{R}^2$.

On peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$. On a $y_p'(x) = -\alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$ et $y"_p(x) = -\alpha\cos(x) - \beta\sin(x)$. On a donc y_p solution si et seulement si

$$(\alpha - 3\beta)\cos(x) + (\beta + 3\alpha)\sin(x) = \cos(x) + \sin(x),$$

donc

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

On obtient $\alpha = \frac{2}{5}$ et $\beta = -\frac{1}{5}$. Une solution particulière est donc

$$y_p(x) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x).$$

On peut aussi utiliser le principe de superposition pour dire que si z_p est solution de $z" - 3z' + 2z = e^{ix}$, alors $y_p = \mathcal{R}e(z_p) + \mathcal{I}m(z_p)$ est solution de l'équation étudiée.

On cherche donc une solution z_p de $z" - 3z' + 2z = e^{ix}$ sous la forme λe^{ix}, on a z_p solution si et seulement si $(1-3i)\lambda = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{1-3i} = \dfrac{1+3i}{10}$. On a alors $z_p(x) = \dfrac{1+3i}{10}e^{ix} = \dfrac{1}{10}(\cos(x) - 3\sin(x) + 3i\cos(x) + i\sin(x))$. Ainsi,

$$y_p(x) = \frac{1}{10}(\cos(x) - 3\sin(x)) + \frac{1}{10}(3\cos(x) + \sin(x)) = \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$$

On retrouve bien la même solution particulière.

On en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 59 L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ a pour racine i et $-i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \alpha\sin(x) + \beta\cos(x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On remarque que z_p est solution de l'équation $z" + z = e^{ix}$ si et seulement si sa partie imaginaire y_p est solution de l'équation $y" + y = \sin x$. On cherche une solution particulière z_p sous la forme $z_p(x) = \alpha x e^{ix}$ car i est racine simple de l'équation caractéristique. On a $z_p'(x) = (i\alpha x + \alpha)e^{ix}$ et $z_p"(x) = (-\alpha x + 2i\alpha)e^{ix}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $(2i\alpha - \alpha x + \alpha x)e^{ix} = e^{ix}$ ce qui impose $\alpha = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$. Une solution particulière de $z" + z = e^{ix}$ est $z_p : x \mapsto -\dfrac{ixe^{ix}}{2}$ donc une solution particulière de $y" + y = \sin(x)$ est $y_p : x \mapsto -\dfrac{x}{2}\cos(x)$.

Les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{x}{2}\cos(x) + \alpha\sin(x) + \beta\cos(x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 60 Exprimons les dérivées de $z : t \mapsto y(\tan(t))$ en fonction de celles de y. On a :

$$z' : t \mapsto (1 + \tan^2 t)y'(\tan(t)) \text{ et}$$

$$z" : t \mapsto (1 + \tan^2 t)y"(\tan(t)) + 2\tan(t)\left(1 + \tan^2 t\right)y'(\tan(t)).$$

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de l'équation } (1+x^2)^2 y" + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)^2 y"(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + 4y(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \\
& \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \left(1 + \tan^2(t)\right)^2 y"(\tan(t)) + 2\tan(t)(1+\tan^2(t))y'(\tan(t)) + 4y(\tan(t)) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, z"(t) + 4z(t) = 0 \text{d'après les calculs faits ci-dessus}
\end{aligned}$$

Résolvons cette équation. Son équation caractéristique admet $\pm 2i$ pour racines donc les solutions sont $z : t \mapsto \alpha\cos(2t) + \beta\sin(2t), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On sait que z est solution de l'équation $z"(t) + 4z(t) = 0$ si et seulement si $y : x \mapsto z(\arctan(x))$ est solution de $(1+x^2)^2 y" + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \alpha\cos(2\arctan(x)) + \beta\sin(2\arctan(x)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On va simplifier leurs expressions. On écrit :

$$\cos(2\arctan(x)) = 2\cos^2\arctan(x) - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2\arctan(x)} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

et

$$\sin(2\arctan(x)) = 2\sin(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) = 2\tan(\arctan(x))\cos^2(\arctan(x)) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{\alpha(1-x^2)}{1+x^2} + \frac{2\beta x}{1+x^2}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 61 On trouve $y_0 = -\dfrac{1}{x}$ comme solution particulière. On pose $z = \dfrac{1}{y + \frac{1}{x}}$. C'est équivalent à $y = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{x}$ (et z ne s'annule pas). On dérive y, on obtient

$$y' = -\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x^2}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1 \quad & \Leftrightarrow \frac{-z'x^2}{z^2} + 1 = \frac{x^2}{z^2} - \frac{2x}{z} + 1 + \frac{x}{z} - 1 + 1 \\
& \Leftrightarrow \frac{-z'x^2}{z^2} = \frac{x^2 - xz}{z^2} \\
& \Leftrightarrow -x^2 z' + xz = x^2.
\end{aligned}$$

On résout l'équation en z sur un intervalle sur lequel $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas. On pose $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

Correction 62 Exprimons les dérivées de $z : t \mapsto y(e^t)$ en fonction de celles de y.

On a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z"(t) = e^{2t}y"(e^t) + e^t y'(e^t)$.

On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
& y \text{est solution de } x^2 y" + 3xy' + y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, x^2 y"(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}y"(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z \text{ est solution de } z" + 2z' + z = 0 \text{d'après les calculs faits ci-dessus}
\end{aligned}$$

Résolvons $z" + 2z' + z = 0$. Les solutions sont les fonctions

$$t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On sait que z est solution de $z" + 2z' + z = 0$ si et seulement si $y : x \mapsto z(\ln x)$ est solution de $x^2y" + 3xy' + y = 0$, on en déduit que les solutions de l'équation homogène sont

$$x \mapsto \frac{(\alpha \ln x + \beta)}{x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y"_p(x) = 2a$ donc y_p est solution si et seulement si $9ax^2 + 4bx + c = x^2 + 2x + 1$. Par unicité des coefficients, on trouve $a = \dfrac{1}{9}, b = \dfrac{1}{2}$ et $c = 1$. On en déduit que les solutions sont :

$$x \mapsto \frac{1}{9}x^2 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{(\alpha \ln x + \beta)}{x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 63 Comme suggéré dans l'énoncé, on exprime les dérivées de $z : t \mapsto y(e^t)$ en fonction de celles de y.

On a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z"(t) = e^{2t}y"(e^t) + e^t y'(e^t)$. On remarque que :

$$\begin{array}{rl} & y \text{est solution de } x^2y" + 3xy' + 4y = 7x\ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, x^2y"(x) + 3xy'(x) + 4y(x) = 7x\ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t}y'(e^t) + 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 7te^t \\ \Leftrightarrow & z \text{ est solution de } z" + 2z' + 4z = 7te^t \end{array}$$

Nous allons résoudre cette équation. On commence par résoudre l'équation homogène. Son équation caractéristique $r^2 + 2r + 4 = 0$ a pour racines $-1 \pm i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$t \mapsto e^{-t}(a \cos \sqrt{3}t + b \sin \sqrt{3}t), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $z_p : t \mapsto (at + b)e^t$ car 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $z_p'(t) = (at + a + b)e^t$ et $z_p"(t) = (at + 2a + b)e^t$. La fonction z_p est solution de l'équation $z" + 2z' + 4z = 7te^t$ si et seulement si

$$7at + 7b + 4a = 7t.$$

En identifiant les coefficients, on obtient $a = 1$ et $b = -\dfrac{4}{7}$. Les solutions de l'équation $z" + 2z' + 4z = 7te^t$ sont donc les fonctions :

$$t \mapsto e^{-t}(a \cos \sqrt{3}t + b \sin \sqrt{3}t) + \left(t - \frac{4}{7}\right) e^t, (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On sait que z est solution de $z" + 2z' + 4z = 7te^t$ si et seulement si $y : x \mapsto z(\ln(x))$ est solution de $x^2y" + 3xy' + 4y = 7x\ln(x)$.

On en déduit que les solutions de $x^2y" + 3xy' + 4y = 7x\ln(x)$ sont les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{x}(a \cos(\sqrt{3}\ln x) + b \sin(\sqrt{3}\ln x)) + x(\ln x - \frac{4}{7}), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 64 On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $y_p(x) = ax$. Une telle fonction est solution si et seulement si

$$a - \frac{ax}{x} - a^2x^2 = -9x^2$$

ce qui impose $a^2 = 9$. On choisit $y_p(x) = 3x$ comme solution particulière.

Faisons maintenant le changement de fonction inconnue suivant : $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$ où z est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Commençons par exprimer les dérivées de y en fonction de celles de z: On a :

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} \text{ et } y^2(x) = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)},$$

donc y est solution de $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ si et seulement si

$$3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{xz(x)} - 9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 9x^2,$$

Après simplification, on obtient y est solution de $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ si et seulement si z est solution de : $z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1$. Résolvons cette équation. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}e^{-3x^2}, \lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(x) = \dfrac{\lambda(x)e^{-3x^2}}{x}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $\lambda'(x) = xe^{3x^2}$ d'où $z_p(x) = \dfrac{1}{6x}$. Ainsi, les solutions de l'équation $z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{6x} + \dfrac{\lambda}{x}e^{-3x^2}, \lambda \in \mathbb{R}$. La fonction z ne doit pas s'annuler sur $\mathbb{R}_+^\star$. L'équation $1 + 6\lambda e^{-3x^2} = 0$ n'a pas de solution pour $\lambda = 0$ et, pour $\lambda \neq 0$, elle est équivalente à $e^{-3x^2} = -\dfrac{1}{6\lambda}$. Comme $e^{-3x^2} \in]0, 1]$, elle n'a pas de solution si $\lambda > -\dfrac{1}{6}$.

On en déduit que les solutions de $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$ sont les fonctions $x \mapsto 3x - \dfrac{6x}{1 + 6\lambda e^{-3x^2}}$ avec $\lambda \in \left]-\dfrac{1}{6}, +\infty\right[$.

Correction 65 On a $z'(t) = e^t y(e^t)$ et $z"(t) = e^{2t}y"(t) + e^t y'(e^t)$. On a donc

$$\begin{array}{rl} y \text{ solution de E sur } \mathbb{R}^{+*} & \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, ae^{2t}y"(e^t) + be^t y'(z^t) + cy(e^t) = 0 \\ & \Leftrightarrow az"(t) + (b - a)z'(t) + cz(t) = 0. \end{array}$$

Les solutions de cette dernière équation dépendent du signe du discriminant : $(b - a)^2 - 4ac$. Si on note S l'ensemble des solutions de cette équation à coefficients constants, l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}^{+*}$ est $\{z(\ln x), z \in S\}$.

Pour déterminer les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$, on remarque que $(y(-x))' = -y'(-x)$ et $(y(-x))" = y"(-x)$. On a donc :

$$ax^2y"(x) + bxy(x) + cy(x) = 0 \Leftrightarrow a(-x)^2 (y(-x))" + (-x)(y(-x))' + cy(-x) = 0.$$

On en déduit que $y(x)$ solution sur $\mathbb{R}^{-*}$ si et seulement si $y(-x)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On applique ce qu'on vient de faire à $x^2y" - xy' + y = 0$. D'après ce qui précède, y est une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si z est solution de l'équation $z" - 2z' + z = 0$. Les solutions sont les fonctions

$$t \mapsto (\alpha t + \beta)e^t, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ sont :

$$x \mapsto (\alpha \ln |x| + \beta)x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 66 1. On pose $z(t) = y(e^t)$. On a alors :

$$z'(t) = e^t y'(e^t)$$

et

$$z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(t).$$

On a :

$$\begin{aligned} &x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique de :

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$$

est :

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Elle possède une racine double donc les solutions de $z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$t \mapsto (at + b)e^{-t},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de $x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :

$$x \mapsto (a \ln x + b)e^{-\ln x},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

ce qui se réécrit :

$$x \mapsto \frac{(a \ln x + b)}{x},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Si une solution polynômiale existe, notons ax^n son terme dominant. Le terme dominant de $x^2y''(x)$ est :

$$n(n-1)ax^{n-2}x^2 = n(n-1)ax^n.$$

Le terme dominant de $3xy'(x)$ est $3nax^n$ et celui de $y(x)$ est ax^n. On doit donc avoir :

$$n(n-1)ax^n + 3nax^n + ax^n = 3x^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} n(n-1) + 3n + 1 &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \neq 0, \end{aligned}$$

il faut donc $n = 2$. On cherche donc une solution polynômiale sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. On a :

$$y_p \text{ solution } \Leftrightarrow 9ax^2 + 4bx + c = 3x^2 + 4x + 1.$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = 1. \end{cases}$$

3. D'après les deux questions précédentes, on en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$x \mapsto \frac{(a \ln x + b)}{x} + \frac{x^2}{3} + x + 1,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 67 Soit y une solution non-nulle.

1. si y ne s'annule pas, on a alors $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = 1$ donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $2\sqrt{y} = x + b$ donc $y = \left(\dfrac{x+b}{2}\right)^2$. On obtient une contradiction car $x \mapsto \left(\dfrac{x+b}{2}\right)^2$ s'annule.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $y(a) = 0$. On sait que y est croissante puisque y' est positive, donc, si $x \leqslant a$, on a:
$$y(x) \leqslant y(a) = 0,$$
ce qui implique $y(x) \leqslant 0$. Or y est positive (puisqu'on considère sa racine carrée), donc cela implique $y(x) = 0$.
3. Notons K l'ensemble des points d'annulation de la fonction. On sait donc que K est non-vide d'après la question 1. Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas majoré. Soit M un réel quelconque, alors on peut trouver $A > M$ tel que $A \in K$ (puisque K non majoré). On a alors $y(M) = 0$ d'après la question précédente donc $M \in K$. Ainsi, si K est non majoré, alors $\mathbb{R} \subset K$ donc $K = R$. Or si $K = \mathbb{R}$, la fonction s'annule sur tout $\mathbb{R}$ ce qui contredit l'hypothèse que y n'est pas la solution nulle. On a montré que K est majoré.
4. On note $c = \sup K$. On se place sur $]c, +\infty[$. La fonction y ne s'annule pas donc, d'après le travail effectué dans la première question, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que
$$y|_{]c,+\infty[} : x \mapsto \left(\frac{x+b}{2}\right)^2.$$
La fonction y étant dérivable, elle est continue. On doit donc avoir $\lim\limits_{x \to c^-} y(x) = \lim\limits_{x \to c^+} y(x)$. On a

- $\lim_{x\to c^-} y(x) = 0$ et
- $\lim_{x\to c^+} y(x) = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$

On en déduit que $c = -b$.

Par définition de c, on a alors

$$y : x \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \begin{cases} \left(\frac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

Correction 68 Soit f une solution. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x)f'(x) = 1$, f et f' ne s'annulent pas. On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ donc f' est dérivable. On peut dérive l'équation fonctionnelle:

$$-f'(-x)f'(x) + f(-x)f"(x) = 0,$$

se qui se réécrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f"(x)}{f'(x)},$$

car $f'(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

On intègre l'égalité $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{f"}{f'}$, on obtient l'existence d'un réel K tel que :

$$\ln|f'(x)| = \ln|f(x)| + K.$$

On sait que f et f' ne s'annulent pas et sont continues, elles sont donc de signes constants. En passant à l'exponentielle et posant $\lambda = \pm e^K$ selon le signe de ff', on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lambda f(x).$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto \mu e^{\lambda x}$. On doit donc chercher les solutions de l'équation fonctionnelle parmi les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \mu e^{\lambda x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

En injectant dans l'équation, on voit que $f(-x)f'(x) = \lambda\mu^2$. On doit donc avoir $\lambda\mu^2 = 1$, ce qui impose $\lambda = \dfrac{1}{\mu^2}$.

Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \mu e^{x/\mu^2}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction 69 On commence par remarquer que pour $x = y = 0$, on obtient $2f(0) = 2f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou 1. Si $f(0) = 0$, alors pour $y = 0$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(x+0) + f(x-0) = f(0)f(x) = 0,$$

donc f est nulle.

Si f est une solution non nulle, on a $f(0) = 1$. Dérivons deux fois l'équation fonctionnelle par rapport à y. On obtient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f"(x+y) + f"(x-y) = 2f(x)f"(y).$$

Pour $y = 0$, on obtient $f"(x) = f(x)f"(0)$.

Ainsi, les solutions de l'équation fonctionnelle sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 de la forme $y" = Ky$. Les solutions d'une telle équation sont de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$ si $K = 0$ et

$$x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax} \text{ ou } x \mapsto \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax),$$

avec $a = \sqrt{\pm K}$ selon que K est positif ou négatif.

Cherchons maintenant, parmi ces solutions, celles qui sont effectivement solutions de l'équation fonctionnelle. On sait déjà qu'une solution non nulle f vérifie $f(0) = 1$. En dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à y on obtient $f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$ puis pour $x = y = 0$, $f'(0)f(0) = 0$ ce qui impose, puisque $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Si $f : x \mapsto \alpha x + \beta$, alors $f(0) = \beta = 0$ et $f'(0) = \alpha = 0$ ce qui impose $f : x \mapsto 1$.

Si $f : x \mapsto \alpha e^{ax} + \beta e^{-a}$, on a $f(0) = 1$ donc $\alpha + \beta = 1$ et $f'(0) = 0 = \alpha - \beta$. On a donc $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ donc $f : x \mapsto \mathrm{ch}(ax)$.

Si $f : \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$, on a $f(0) = \alpha = 1$ et $f'(0) = \beta = 0$ donc $f : x \mapsto \cos(ax)$.

En conclusion, les solutions sont la fonction nulle, la fonction constante égale à 1 et les fonctions de la forme $x \mapsto \cosh(ax), \alpha > 0$ et $x \mapsto \cos(ax)$, avec $a > 0$.

Correction 70 Pour $m = 0$, on trouve $x \mapsto (ax+b)e^{-x} + 1$. Pour $m \neq 0$, on trouve $x \mapsto \dfrac{m}{\sqrt{m^2+2}} \sin\left(2mx\sqrt{m^2+2}\right) + \cos(mx) - 2m\sin(mx)$

Correction 71 1. On pose $z(t) = y(e^t)$, alors y est solution de l'équation ci-dessus si et seulement si z est solution de

$$z" - z'(t) + z(t) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions :

$$t \mapsto e^{t/2}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t+\beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle sont :

$$x \mapsto \sqrt{x}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x+\beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle. Alors f' est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^{\star}$. On peut donc dériver l'égalité et On dérive l'égalité, on obtient :

$$f"(x)=-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

c'est-à-dire :

$$f"(x)=-\frac{1}{x^2} f(x) \Leftrightarrow x^2 f"(x)+f(x)=0.$$

Comme $x \in \mathbb{R}^{+*}$, cette équation est équivalente à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{2t} y"(e^t)+y(e^t)=0.$$

On a montré à la question précédente, que les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \sqrt{x}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x+\beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right),\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons parmi ces solutions, lesquelles vérifient $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
f'(x) & =\frac{1}{2 \sqrt{x}}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x+\beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)+\sqrt{x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2x} \alpha \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x+\frac{\sqrt{3}}{2x} \beta \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \\
& =\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta \sqrt{3}}{2}\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x+\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha \sqrt{3}}{2}\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right),
\end{aligned}$$

et

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x-\beta \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut donc $\alpha=\sqrt{3} \beta$. On en déduit que les solutions de l'équation fonctionnelle sont les fonctions :

$$x \mapsto \beta \sqrt{x}\left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x+\sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right),\ \beta \in \mathbb{R}.$$