Correction du TD n 8

Correction 1 On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$. On a $A = \{f\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^\star\}$. Elle est dérivable de dérivée $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$, son tableau de variations est donc :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

On a $1 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc, d'après le tableau de variations, la borne supérieure de l'ensemble est à chercher entre $f(1)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On a $f(1) = 0$ donc le maximum de notre ensemble est atteint pour $n = 2$ et vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Correction 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\dfrac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} \leqslant 1$ donc l'ensemble est majoré. Il admet donc une borne supérieure. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} = 1$ donc il ne peut y avoir de majorant plus petit et 1 est la borne supérieure de l'ensemble. Ce n'est pas un maximum car il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n - \dfrac{1}{n} = n + \dfrac{1}{n}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\dfrac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} \geqslant 0$ et cette valeur est atteinte pour $n = 1$, c'est donc le minimum de l'ensemble.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, l'inégalité est donc vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc l'ensemble est égal à $\mathbb{R}$. Il n'admet ni borne supérieure, ni borne inférieure.

3. L'ensemble n'est pas majoré puisqu'on peut prendre x aussi grand que possible. Il est minoré par 1 donc il admet une borne inférieure. Ce n'est pas un minimum car l'inégalité est stricte donc $1 \notin \{x \in \mathbb{Q}, x^2 > 1\}$.

4. L'ensemble est borné, il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. Pour tout $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, on a $0 \leqslant x \leqslant 1$ et 0 et 1 appartiennent à cet ensemble donc $\min([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ et $\max([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1$.

5. L'ensemble est à nouveau borné mais cette fois-ci, la borne inférieure, égale à 0, et la borne supérieure, égale à 1, n'appartiennent pas à l'ensemble, ce dernier n'admet donc pas de minimum ni de maximum.

Correction 3 On pose $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$. On a $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$ donc A est un ensemble borné. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ donc 2 est le maximum de A.

On remarque que, pour $n = 2p+1$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{2p+1} = -1$, cela montre qu'il ne peut exister de minorant de A strictement supérieur à -1. On a donc

$$\inf(A) = -1.$$

L'ensemble A n'admet pas de minimum car il n'existe pas d'entier n tel que $(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} = -1$.

Correction 4 Soit $t \in [a,b]$, alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|.$$

On sait que $|f(t)| \leqslant \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ et $|g(t)| \leqslant \sup\limits_{t\in[a,b]} |g(t)|$. On a donc:

$$|f(t) + g(t)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)|.$$

Ceci étant valable pour tout $t \in [a,b]$, on a donc :

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) + g(t)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)|.$$

Remarque. *L'égalité est fausse, on peut s'en convaincre en prenant $g = -f$ et f non identiquement nulle.*

Correction 5

1. Soit $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, alors $x = \lambda + a$ avec $a \in \mathbb{R}$; on a donc

   $$x \leqslant \lambda + \sup(A).$$

   Ceci étant vrai pour tout $x \in \{\lambda + a, a \in A\}$, on a

   $$\sup\{\lambda + a, a \in A\} \leqslant \lambda + \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $a + \lambda \in \{\lambda + a, a \in A\}$ donc

$$a + \lambda \leqslant \sup\{\lambda + a, a \in A\}$$

soit encore

$$a \leqslant \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a :

$$\sup(A) \leqslant \sup\{\lambda + a, a \in A\} - \lambda,$$

d'où $\sup(A) + \lambda \leqslant \sup\{\lambda + a, a \in A\}$. Par double inégalité, on a montré l'égalité.

2. On suppose $\lambda \geqslant 0$. Si $\lambda = 0$, le résultat est vrai, on suppose donc $\lambda > 0$. On procède, à nouveau, par double inégalité. Soit $x \in \{\lambda a, a \in A\}$, alors $x = \lambda a$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$a \leqslant \sup(A)$$

et $\lambda > 0$ donc

$$x \leqslant \lambda \sup(A).$$

Soit maintenant $a \in A$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in A\}$ donc

$$\lambda a \leqslant \sup\{\lambda a, a \in A\}.$$

Comme $\lambda > 0$, on peut diviser l'inégalité par λ et on obtient :

$$a \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\}.$$

Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a $\sup(A) \leqslant \dfrac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\}$. Par double inégalité, on a montré l'égalité.

3. Si $\lambda < 0$, on a $\sup\{\lambda a, a \in A\} = \lambda \inf(A)$. En effet, si $x \in \{\lambda a, a \in A\}$, on a $x = \lambda a$ avec $a \in A$ donc $a \geqslant \inf(A)$. Comme $\lambda < 0$, multiplier par λ l'inégalité donne

$$x \leqslant \lambda \inf(A).$$

De même, si $a \in A$, alors $\lambda a \in \{\lambda a, a \in A\}$ donc $\lambda a \leqslant \sup\{\lambda a, a \in A\}$. On divise par λ ce qui inverse l'inégalité et on obtient $\dfrac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\} \leqslant a$. Ceci étant valable pour tout $a \in A$, on a :

$$\frac{1}{\lambda} \sup\{\lambda a, a \in A\} \leqslant \inf(A).$$

Par double inégalité, on a montré l'égalité suivante :

$$\sup\{\lambda a, a \in A\} = \lambda \inf(A).$$

Correction 6 1. On a : $\forall a \in A, a \leqslant \sup B$ donc $\sup(B)$ est un majorant de A et, par suite, $\sup A \leqslant \sup B$.

2. On a : $\forall a \in A, a \geqslant \inf B$ donc $\inf A$ est un minorant de B d'où $\inf(A) \geqslant \inf B$.

3. Soit $x \in A \cup B$, alors soit x est dans A et $x \leqslant \sup A$, soit x est dans B et $x \leqslant \sup B$ donc, dans les deux cas, $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$. On en déduit que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$ donc $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.

   Pour l'inégalité réciproque, on utilise la première implication: $A \subset A \cup B$ donc $\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B)$ et $B \subset A \cup B$ donc $\sup(B) \leqslant \sup(A \cup B)$. Ces deux inégalités impliquent $\max(\sup A, \sup B) \leqslant \sup(A \cup B)$ d'où l'égalité.

Correction 7 1. Soit $x \in A + B$, alors $x = a + b$ avec $(a, b) \in A \times B$. Comme $a \leqslant \sup(A)$ et $b \leqslant \sup(B)$, on a donc $a + b \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Ainsi, $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$ donc $\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Montrons l'autre inégalité. Soit $a \in A$. Alors il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B qui tend vers $\sup(B)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a + b_n \in A + B$ donc $a + b_n \leqslant \sup(A + B)$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant \sup(A + B) - b_n$. On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient $a \leqslant \sup(A + B) - \sup(B)$ donc $\sup(A + B) - \sup(B)$ est un majorant de A, on en déduit que $\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - \sup(B)$ ce qui montre l'autre inégalité.

2. Soit $a \in A$, alors $-a \in -A$ donc $-a \geqslant \inf(-A)$ puis $a \leqslant -\inf(-A)$ donc $-\inf(-A)$ est un majorant de A. On en déduit que $\sup(A) \leqslant -\inf(-A)$. Montrons l'autre inégalité. Soit $a \in A$, alors $a \leqslant \sup(A)$ donc $-\sup(A) \leqslant -a$. Comme $-a \in -A$, $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$ donc $\inf(-A) \leqslant -\sup(A)$. Par double inégalité, on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.

3. Soit $b \in B$, alors $\inf(B) \leqslant b$. Pour tout $a \in A$, on a donc $\inf(B) + a \leqslant a + b$. Comme $a + b \in A + B$, on a $\inf(B) + a \leqslant \sup(A + B)$. Ainsi, $\sup(A + B) - \inf(B)$ est un majorant de A, on a donc $\sup(A) \leqslant \sup(A + B) - \inf(B)$ d'où l'inégalité souhaitée.

Correction 8 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \mapsto x^2 + ax - 1$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto 2x + a$.

- Si $-\dfrac{a}{2} < 0$ c'est-à-dire $a > 0$ alors f_a est croissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0	1
f_a	-1 $\nearrow$	a

et $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_a(x)| = \max(1, a)$.

- Si $-\dfrac{a}{2} > 1$, c'est-à-dire $a < -2$, f_a est décroissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0		1
f_a	-1	$\searrow$	a

et $\sup\limits_{x\in[0,1]} \lvert f_a(x)\rvert = \lvert a\rvert$

- Si $-\dfrac{a}{2} \in [0,1]$, c'est-à-dire $a \in [-2,0]$, elle atteint son maximum en 0 ou 1 et son minimum en $-\dfrac{a}{2}$. On a le tableau de variations suivant :

x	0		$-\frac{a}{2}$		1
f_a	-1	$\searrow$	$-\frac{a^2}{4}-1$	$\nearrow$	a

Comme $a<0$, le maximum de $\lvert f_a\rvert$ est $\dfrac{a^2}{4}+1$.

On a montré :

a	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$\sup \lvert f_a\rvert$		$\lvert a\rvert$		$\frac{a^2}{4}+1$		1		a	

Comme pour tout $a\in\mathbb{R}$, on a $\sup\limits_{x\in[0,1]} \lvert f_a(x)\rvert \geqslant 1$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]} \lvert f_0(x)\rvert = 1$, on en déduit que $\inf\limits_{a\in\mathbb{R}} \sup\limits_{x\in[0,1]} \lvert f_a(x)\rvert = 1$.

Correction 9 Il suffit d'écrire

$$\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1,$$

ce qui implique

$$\lfloor x\rfloor + n \leqslant x+n < (\lfloor x\rfloor + n) + 1$$

on a alors montré que l'entier $\lfloor x\rfloor + n$ vérifie la caractérisation de la partie entière de $x+n$ (comme l'unique entier N tel que $N \leqslant x+n < N+1$) donc $\lfloor x\rfloor + n = \lfloor x+n\rfloor$.

Correction 10 Par définition de la partie entière, on a $x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$ donc $-2x \leqslant -2\lfloor x\rfloor \leqslant 2-2x$ et $2x-1 < \lfloor 2x\rfloor \leqslant 2x$. On en déduit que :

$$-1 < \lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor < 2.$$

Comme $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor$ est un entier, il ne peut être égal qu'à 0 ou 1.

Correction 11

1. Pour $a=b=\dfrac12$, on a $a+b=1$ donc $\lfloor a+b\rfloor = 1$ et $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.
2. Pour $a=b=\dfrac13$, on a $a+b=\dfrac23$ donc $\lfloor a+b\rfloor = 0$ et $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.
3. Pour $a=b=\dfrac13$, on a $ab=\dfrac19$ donc $\lfloor ab\rfloor = 0$ et $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.
4. Pour $a=\dfrac45$ et $b=\dfrac32$, on a $ab=\dfrac65$ donc $\lfloor ab\rfloor = 1 = \lfloor b\rfloor$ et $\lfloor a\rfloor = 0$ d'où l'égalité souhaitée.
5. Pour $a=b=-\dfrac13$, on a $ab=\dfrac19$ donc $\lfloor ab\rfloor = 0$ et $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor = -1$ d'où l'égalité souhaitée.
6. Pour $a=\dfrac12$ et $n=2$, on a $\lfloor a\rfloor = 0$ donc $n\lfloor a\rfloor = 0$ alors que $na=1$ donc $\lfloor na\rfloor = 1$.
7. On a déjà traité le cas $k=0$, $k=1$ et $k=-1$. On prend $a=\dfrac1k$, $b=k^2+\dfrac12$, on a $ab=k+\dfrac{1}{2k}$ donc $\lfloor ab\rfloor = k$ et $\lfloor a\rfloor = 0$.

Correction 12 On sait que :

$$\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$$

et

$$\lfloor y\rfloor \leqslant y < \lfloor y\rfloor + 1$$

donc

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant x+y < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2 \qquad (1)$$

D'autre part, par définition de $\lfloor x+y\rfloor$, on a :

$$\lfloor x+y\rfloor \leqslant x+y < \lfloor x+y\rfloor + 1 \qquad (2)$$

En combinant la première inégalité de (1) et la deuxième inégalité de (2), on obtient

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant x+y < \lfloor x+y\rfloor + 1$$

et en combinant la deuxième inégalité de (1) et la première inégalité de (2), on obtient

$$\lfloor x+y\rfloor \leqslant x+y < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$$

donc
$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor<\lfloor x+y\rfloor+1 \text{ et } \lfloor x+y\rfloor<\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2.$$
Comme ce sont des inégalités strictes entre entiers, on en déduit que :
$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor \text{ et } \lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$
et on a montré l'encadrement souhaité.

Correction 13 On sait que, $\forall x>1$, $\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$, donc
$$\forall x>1,\ x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=0,$$
on en déduit que la limite en $+\infty$ est nulle.

Correction 14 On suppose, tout d'abord, $x\in[0,1[$. On a alors $\lfloor x\rfloor=0$. De plus, $nx\in[0,n[$ donc $\lfloor nx\rfloor\in[\![0,n-1]\!]$ et $\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\in[0,1[$. On a donc $\lfloor\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\rfloor=0$ d'où l'égalité souhaitée.
Supposons maintenant $x\in\mathbb{R}$. On écrit $x=a+\lfloor x\rfloor$ avec $a\in[0,1[$. On a alors $nx=na+n\lfloor x\rfloor$ puis $\lfloor nx\rfloor=\lfloor na\rfloor+n\lfloor x\rfloor$ en utilisant l'exercice 9. On divise par n et on applique la partie entière :
$$\begin{aligned}\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\rfloor&=\lfloor\frac{\lfloor na\rfloor}{n}+\lfloor x\rfloor\rfloor\\&=\lfloor\frac{\lfloor na\rfloor}{n}\rfloor+\lfloor x\rfloor\text{en appliquant l'exercice 9}\end{aligned}$$
D'après le cas traité ci-dessus, on a $\lfloor\dfrac{\lfloor na\rfloor}{n}\rfloor=0$ donc $\lfloor\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}\rfloor=\lfloor x\rfloor$. On a bien l'égalité souhaitée.

Correction 15 On commence par trouver une inégalité entre $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ et $\sqrt{4n+2}$ en raisonnant (par exemple) par équivalence:
$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<\sqrt{4n+2}\Leftrightarrow\quad & n+1+2\sqrt{n(n+1)}+n\leqslant 4n+2\\ \Leftrightarrow\quad & 2\sqrt{n(n+1)}\leqslant 2n+1\end{aligned}$$
La dernière inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi. Par croissance de la partie entière, on en déduit que
$$\lfloor\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\rfloor\leqslant\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor.$$
On remarque que $\sqrt{4n+2}$ n'est jamais entier. En effet, si m est entier, alors $m^2=4r^2$ ou $4r^2+4r+1$ selon que m est pair ou non. On n'a donc jamais un carré de la forme $4n+2$.

Pour conclure qu'il y a égalité, on suppose par l'absurde que
$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor<\sqrt{4n+2}.$$
On pose $m=\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ et on raisonne par équivalence :
$$\begin{aligned}&\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<m<\sqrt{4n+2}\\ \Leftrightarrow\quad & n+1+2\sqrt{n(n+1)}+n<m^2<4n+2\text{par positivité des deux membres}\\ \Leftrightarrow\quad & 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<m^2<4n+2\\ \Leftrightarrow\quad & 2\sqrt{n(n+1)}<m^2-2n-1<2n+1\\ \Leftrightarrow\quad & 4n(n+1)<(m^2-2n-1)^2<4n^2+4n+1\text{par positivité des deux membres}\end{aligned}$$
Ce dernier encadrement est absurde car $(m^2-2n-1)^2$ est un entier et il ne peut être strictement compris entre deux entiers consécutifs. On en déduit que
$$\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<\sqrt{4n+2}$$
donc $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor\leqslant\lfloor\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\rfloor$ et par double inégalité, on a montré l'égalité.

Correction 16 On raisonne par équivalence :
$$\begin{aligned}&\lfloor x^2\rfloor=\lfloor x\rfloor^2\\ \Leftrightarrow\quad&\lfloor x^2\rfloor-\lfloor x\rfloor^2=0\\ \Leftrightarrow\quad&\lfloor x^2-\lfloor x\rfloor^2\rfloor=0\text{ car }\lfloor x\rfloor^2\in\mathbb{Z}\\ \Leftrightarrow\quad&x^2-\lfloor x\rfloor^2\in[0,1[\end{aligned}$$
On a bien l'équivalence souhaitée.

Correction 17 On raisonne par double implication.
$\boxed{\Leftarrow}$Si $x\in\mathbb{Z}$, $x^2\in\mathbb{Z}$, alors $\lfloor x\rfloor=x$ et $\lfloor x^2\rfloor=x^2$ donc l'égalité est vraie.
$\boxed{\Rightarrow}$On suppose maintenant $\lfloor x^2\rfloor=\lfloor x\rfloor^2$. Par définition de la partie entière, on a :
$$x^2-1<\lfloor x^2\rfloor\leqslant x^2$$
et
$$x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x.$$
Comme x est négatif, en élevant au carré la dernière inégalité, on obtient :
$$x^2\leqslant\lfloor x\rfloor^2\leqslant(x-1)^2.$$
Or $\lfloor x^2\rfloor=\lfloor x\rfloor^2$ par hypothèse et comme $\lfloor x^2\rfloor\leqslant x^2$, on a $\lfloor x^2\rfloor=x^2$ par double inégalité. Ceci montre que x^2, et donc x, est entier.

Si x est positif, l'implication $\Leftarrow$ reste vraie. En revanche, on a l'égalité $\lfloor x^2\rfloor=\lfloor x\rfloor^2$ pour $x=\dfrac{3}{2}$ avec $x\notin\mathbb{N}$.

Correction 18 Pour tout entier k tel que $j^2\leqslant k<(j+1)^2$ c'est-à-dire pour $k\in[\![j^2,(j+1)^2-1]\!]$, on a $\lfloor\sqrt{k}\rfloor=j$. On peut réécrire la somme en groupant les termes identiques :
$$\sum_{k=1}^{n^2-1}\sqrt{k}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{j^2\leqslant k<(j+1)^2}\lfloor\sqrt{k}\rfloor=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{j^2\leqslant k<(j+1)^2}j.$$

Il y a $(j+1)^2-j^2=2j+1$ entiers entre j^2 et $(j+1)^2-1$. La somme est donc égale à :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n^2-1}\lfloor\sqrt{k}\rfloor\\
=&\sum_{j=1}^{n-1}j(2j+1)\\
=&\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}\text{en utilisant la formule de la somme des carrés}\\
=&\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Correction 19 On procède par disjonction de cas.
Si $n+m=2p$, alors $\left\lfloor\dfrac{n+m}{2}\right\rfloor=p$ et $\left\lfloor\dfrac{n-m+1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{2n-2p+1}{2}\right\rfloor=n-p$ donc la somme vaut n.

Si $n+m=2p+1$, alors $\left\lfloor\dfrac{n+m}{2}\right\rfloor=p$ et $\left\lfloor\dfrac{n-m+1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{2n-2p}{2}\right\rfloor=n-p$ et la somme vaut, à nouveau, n.

Correction 20 On procède par disjonction de cas:

Si $x\in[0,n[$, on a $\dfrac{x+k}{n}\in[0,2[$ donc les termes de la somme valent 0 ou 1. Ils valent 1 lorsque k est tel que $\dfrac{x+k}{n}\geqslant 1$ c'est-à-dire $k\geqslant n-x$. Par définition de la partie entière, on a $x<\lfloor x\rfloor+1$ donc $-x>-\lfloor x\rfloor-1$. Cela implique $k>n-\lfloor x\rfloor-1$ et, comme k est un entier, on obtient l'inégalité large suivante : $k\geqslant n-\lfloor x\rfloor$. Ainsi, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor=\sum_{k=n-\lfloor x\rfloor}^{n-1}1=\lfloor x\rfloor$$

On a bien l'égalité souhaitée.

Si $x\in\mathbb{R}$, alors il existe $m\in\mathbb{Z}$ et $a\in[0,n[$ tel que $x=mn+a$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor&=\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{nm+a+k}{n}\right\rfloor\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor m+\frac{a+k}{n}\right\rfloor\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}m+\left\lfloor\frac{a+k}{n}\right\rfloor\quad\text{car } m\in\mathbb{Z}\\
&=nm+\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{a+k}{n}\right\rfloor\\
&=nm+\lfloor a\rfloor\text{ d'après les cas traités ci-dessus car } a\in[0,n[
\end{aligned}$$

Or, $\lfloor x\rfloor=\lfloor nm+a\rfloor=nm+\lfloor a\rfloor$ car $nm\in\mathbb{Z}$, on a donc bien l'égalité souhaitée (ouf !).

Correction 21 Pour $x\in[0,1[$, on pose $k=\lfloor nx\rfloor$. On a $k\in[\![0,n-1]\!]$ et $x=a+\dfrac{k}{n}$ avec $a\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right[$. Pour tout $j\in[\![0,n-1]\!]$, on a $\lfloor x+\dfrac{j}{n}\rfloor=\lfloor a+\dfrac{j+k}{n}\rfloor$ donc

$$\lfloor x+\frac{j}{n}\rfloor=\begin{cases}0 & \text{si } j+k<n\\ 1 & \text{si } j+k\geqslant n\end{cases}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\lfloor x+\frac{j}{n}\rfloor=\sum_{j=0}^{n-k-1}\underbrace{\lfloor x+\frac{j}{n}\rfloor}_{=0}+\sum_{j=n-k}^{n-1}\underbrace{\lfloor x+\frac{j}{n}\rfloor}_{=1}=k$ car il y a k termes entre $n-k$ et $n-1$. Comme $k=\lfloor nx\rfloor$, on a le résultat pour $x\in[0,1[$.

On se ramène au cas précédent pour le cas général : Soit $x\in\mathbb{R}$, alors $x=a+\lfloor x\rfloor$ avec $a\in[0,1[$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor&=\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor a+\lfloor x\rfloor+\frac{j}{n}\right\rfloor\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\lfloor x\rfloor+\left\lfloor a+\frac{j}{n}\right\rfloor\right)\quad\text{car }\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}\\
&=n\lfloor x\rfloor+\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor a+\frac{j}{n}\right\rfloor\\
&=n\lfloor x\rfloor+\lfloor na\rfloor\text{d'après le cas traité précédemment}
\end{aligned}$$

Comme $n\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$, on applique encore l'exercice 9 pour écrire

$$n\lfloor x\rfloor+\lfloor na\rfloor=\lfloor n\lfloor x\rfloor+na\rfloor$$

et comme $n\lfloor x\rfloor+na=n\left(a+\lfloor x\rfloor\right)=nx$, on a bien le résultat pour $x\in\mathbb{R}$.