Fonctions usuelles

Introduction: Soit $f : I \to f(I)$ une fonction continue est strictement monotone alors f est une bijection. Soit $b \in f(I)$. On suppose que f est dérivable en $f^{-1}(b)$.

- Si $f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en b et sa dérivée vaut
$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$
- Si $f'\left(f^{-1}(b)\right) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b mais le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale en le point d'abscisse b.

Conclusion: Si f est dérivable en tout point de I et f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable en tout point de $f(I)$ et $\forall x \in f(I), \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$.

I Relations de comparaison entre fonctions

1 Équivalence

Définition 1. Soit a un réel ou a égal $\pm\infty$. On dit que f est équivalente à g lorsque x tend vers a et on note $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ admet une limite lorsque x tend vers a égale à 1.

Remarque: En réalité, ce n'est pas la vraie définition (qui s'écrit avec des ϵ et que nous verrons après le chapitre sur les limites) mais en pratique, cela reviendra à ça.

Exemples 1.

1. $x^2 + 3x - 7 \sim_{x \to +\infty} x^2$.
2. $x^2 + 3x - 7 \sim_{x \to 0} -7$
3. $(x^2 + x)e^x \sim_{x \to +\infty} x^2 e^x$.
4. $(x^2 + x)e^x \sim_{x \to 0} xe^x$
5. $(x^2 + x)e^x \sim_{x \to 1} 2e$

Remarque : $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$. On dit que f et g sont équivalentes.

Proposition 1.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}^\star$, alors $f(x) \sim_{x \to a} l$

Exemple 2. $\cos(x) \sim_{x \to 0} 1$.

On ne peut jamais être équivalent à 0 !!!!

Proposition 2.
Si $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ et que f et g admettent une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Exemples 3.

1. x^2+3x-4 *et* x^2 *en* $+\infty$.
2. $x^2+x\cos(x)$ *et* xe^x *en* 0.
3. $x\cos(x)$ *et* $(x+1)\cos(x)$.

La réciproque est fausse !

Exemple 4. *Les fonctions* $f : x \mapsto x^2$ *et* $g : x \mapsto x$ *ont la même limite en* 0 *et* $+\infty$ *mais ne sont équivalentes ni en* 0 *ni en* $+\infty$.

Proposition 3.
Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \sim_{x\to a} f'(a)$$

ou encore

$$f(x)-f(a) \sim_{x\to a} (x-a)f'(a).$$

Exemples 5.

1. $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$.
2. $e^x-1 \sim_{x\to 0} x$
3. $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$.
4. $\sqrt{1+x}-1 \sim_{x\to 0} \dfrac{x}{2}$.
5. $\tan(x) \sim_{x\to 0} x$.
6. $\dfrac{1}{1+x}-1 \sim_{x\to 0} -x$

La somme dans les équivalents n'est pas pertinente!

Exemple 6. $e^x \sim_{x\to 0} 1+x$ *est vraie mais* $e^x \sim_{x\to 0} 1-x$ *aussi (et* $e^x \sim_{x\to 0} 1+\dfrac{17x}{2}-x^2$ *aussi).*

Proposition 4.
Si $f_1 \sim_{x\to a} g_1$ et $f_2 \sim_{x\to a} g_2$ alors $f_1f_2 \sim_{x\to a} g_1g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \sim_{x\to a} \dfrac{g_1}{g_2}$ (sous réserve que cela ait du sens).

Exemples 7.

1. *Si* $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$, *a-t-on* $f^2(x) \sim_{x\to a} g^2(x)$*?*

2. *Montrer que* $\sqrt{1+\sin(x)} - 1 \sim_{x\to 0} \frac{x}{2}$.

⚠ Si $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$, on ne sait rien de la relation entre $h \circ f(x)$ et $h \circ g(x)$

Exemples 8.

1. $x \sim_{x\to+\infty} x+1$ *mais* e^x *et* e^{x+1} *ne sont pas équivalents car* $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$
2. $x \sim_{x\to+\infty} x+1$ *et* $\ln(x+1) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$ *car* $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ *donc* $\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \to 1$

Question: Si $f_1 \sim_{x\to a} g_1$ et $f_2 \sim_{x\to a} g_2$ a-t-on $f_1(x)+f_2(x) \sim_{x\to a} g_1(x)+g_2(x)$? Peut-on trouver un équivalent de $\sin(2x) - \tan(x)$?

2 Domination

Définition 2. On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a (ou que $f(x)$ est un "petit o" de $g(x)$) si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$.
C'est équivalent de dire que $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Remarque: Là encore, ce n'est pas tout à fait la vraie définition mais elle suffit pour le moment.

Exemples 9.

1. $x^2 + x^3 = o_{x\to 0}(x)$.
2. $e^{x^2} - 1 = o_{x\to 0}(x)$.

Proposition 5.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, on a $o(\lambda x) = o_{x\to a}(x)$

Proposition 6 (opérations en 0)**.**

- $o_{x\to 0}(x) + o_{x\to 0}(x) = o_{x\to 0}(x)$
- $o_{x\to 0}(x) - o_{x\to 0}(x) = o_{x\to 0}(x)$
- $o_{x\to 0}(x) + o_{x\to 0}(x^2) = o_{x\to 0}(x)$
- $\frac{o_{x\to 0}(x^2)}{x} = o_{x\to 0}(x)$.
- $x.o(x) = o(x^2)$.
- $o(x)^2 = o(x^2)$.

Remarque: $\frac{o_{x\to 0}(x)}{x^2}$ est une forme indéterminée.

⚠ On a $o_{x\to 0}(x^2) = o_{x\to 0}(x)$ mais $o_{x\to 0}(x) \neq o_{x\to 0}(x^2)$.

3 Développement limité

Notations: Si $f(x) - g(x) = o_{x\to a}(h(x))$, on écrit $f(x) = g(x) + o_{x\to 0}(h(x))$.

Exemples 10.

1. $e^x = 1 + x + o_{x\to 0}(x)$
2. $\sin(x) = x + o(x)$.

Proposition 7.
On a $f(x) \sim_{x\to a} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o_{x\to a}(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o_{x\to a}(g(x))$.

Exemple 11. *On sait que* $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$ *donc* $\ln(1+x) = x + o_{x\to 0}(x)$.

Proposition 8 (DL1 de f en a)**.** *Si f est dérivable en a, alors*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_{x\to a}(x-a).$$

Exemple 12. *On a le DL1* $\cos(x) = 1 + o_{x\to 0}(x)$ *bien que nous n'ayons pas d'équivalent de* $\cos(x) - 1$ *en* 0.

Remarque: On admet, pour le moment, que l'on peut obtenir un DL d'ordre supérieur à 1 (on va se contenter de 2 pour l'instant) à l'aide de dérivées successives pour les fonctions usuelles.

DL2 usuels en 0:

- $\sin(x) = x + o(x^2)$.
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
- $\tan(x) = x + o(x^2)$.
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$.
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Remarque: l'intérêt des développements limités par rapport aux équivalents est que l'on peut les additionner ! En effet, on sait exactement ce que vaut l'addition de deux "$o(\ )$".

Exemples 13.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) - \tan(x)}{x}$?
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\ln(1+2x) - \sin(x)}$?
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)} - e^{x^2}}{\tan(x/2) - \ln(1+x)}$?
4. *DL_1 en 0 de* $\ln(2+x)$?
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - e^{x^2}}{\sin(x^2)}$?

II Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances

1 Le logarithme népérien

Définition 3. On définit la fonction ln : $\mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ comme l'unique fonction y dérivable de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, y'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Proposition 9.
La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|x| \end{array} \right.$ est dérivable, de dérivée : $\mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Corollaire 10.
Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, un point a de I et une fonction $u : I \to \mathbb{R}^\star$, dérivable en a.
Alors la fonction : $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|u(x)| \end{array} \right.$ est dérivable en a, de nombre dérivée $\dfrac{u'(a)}{u(a)}$.

Exemple 14. *Sur quel intervalle la fonction* $x \mapsto \ln(\sqrt{x}+1)$ *est-elle dérivable? Préciser sa dérivée.*

$$\boxed{\text{On admet } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)}$$

Proposition 11 (équation fonctionnelle du ln)**.**

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Question: Si f est dérivable telle que $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, que dire de f? On a $f(1) = 0$ et, si on dérive par rapport à x en fixant y, on obtient $yf'(xy) = f'(x)$. On en déduit que $f'(y) = \dfrac{f'(1)}{y}$ donc $f(y) = f'(1)\ln(y) + c$ et, comme $f(1) = 0$, f est un multiple de ln. Réciproquement, si $f = \lambda \ln$, f vérifie bien l'équation.

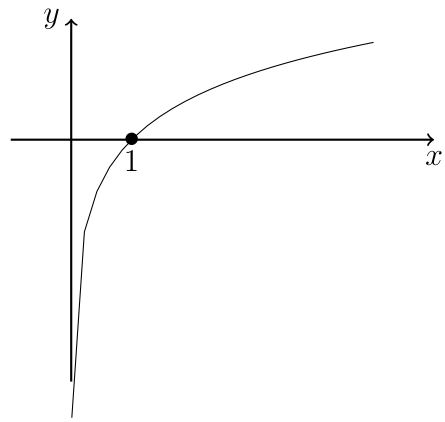
Corollaire 12.

- $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2, \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- $\forall (k,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(x^k) = k\ln(x)$.

On en déduit les limites aux bornes de son domaine de définition:

Proposition 13.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

On a le graphe suivant :



Proposition 14.
La fonction ln est une bijection.

Notations: On note e l'unique antécédent de 1 par ln. On retient qu'il vaut environ $2,72$.

2 L'exponentielle

Définition 4. Pour tout réel x, on note $\exp(x)$ l'unique antécédent de x par ln. On définit ainsi une fonction, appelée fonction exponentielle, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque: La fonction $\exp|^{\mathbb{R}_+^\star}$ est la bijection réciproque de ln.

Proposition 15.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\exp(\ln(x)) = x$.

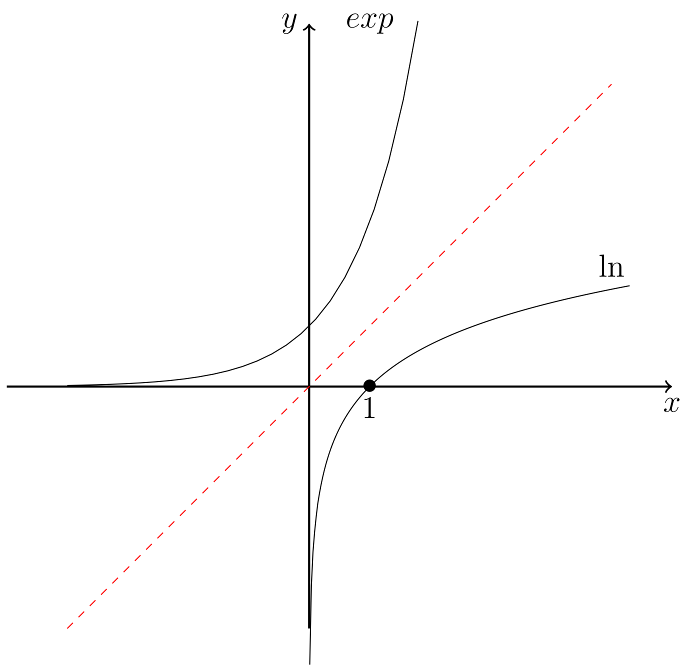
Proposition 16 (équation fonctionnelle de l'exponentielle)**.**

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, exp(x+y) = exp(x)exp(y)$.
- $\forall k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R},\ exp(kx) = (exp(x))^k$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, exp(x-y) = \dfrac{exp(x)}{exp(y)}$.

Proposition 17.
La fonction *exp* est dérivable, de dérivée elle-même.
Elle est strictement croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

$$\boxed{\text{On a } \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^2)}$$

On a le graphe suivant :



3 Puissances réelles

- Pour rappel, si x est réel alors on définit x^n pour tout entier naturel n par

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{fois}}.$$

  En particulier x^0 est un produit vide et vaut donc l'élément neutre pour la multiplication, à savoir 1

- Si en outre x est non nul on dispose alors de son "inverse" x^{-1} ce qui permet de définir pour tout entier naturel n,

$$x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n.$$

  On a ainsi défini x^n pour tout entier relatif n.

- Plaçons-nous dans le cas particulier où x est un réel strictement positif. Sur $\mathbb{R}_+^*$, on dispose de la fonction ln, ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ x^n = (\exp(\ln(x)))^n = \exp\left(n \ln(x)\right).$$

  On s'aperçoit que cette dernière expression $\exp\left(n \ln(x)\right)$ a du sens y compris si n n'est pas entier. Cela incite à étendre la définition, en posant pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha \ = \ \exp\left(\alpha \ln(x)\right).$$

Définition 5. [Puissances quelconques] Soit x un réel **strictement positif** et α un réel **quelconque**. On pose :

$$x^\alpha \ = \ \exp(\alpha \ln(x)).$$

Remarque Rigoureusement parlant, c'est à ce moment-là, après avoir donné cette définition, que l'on peut utiliser la notation e^t plutôt que $\exp(t)$, pour un réel t. Pour cela, on pose le réel :

$$e \mathrel{\hat{=}} \exp(1)$$

et on constate alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^t = \exp(t \ln(e)) = \exp(t)$$

La définition de x^α peut alors être écrite de la façon suivante (celle que l'on écrit en pratique) :

$$\boxed{\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}}$$

Proposition 18 (Règles de calcul)**.** *Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a*

1. $\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, $x^\alpha > 0$.
2. $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$,
3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$,
4. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ *et* $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$,
5. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$,
6. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $1^\alpha = 1$.

Remarque: En particulier, pour tout réel $x > 0$, le nombre $x^{\frac{1}{2}}$ est positif, et vérifie quand on le met au carré :

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$$

donc $x^{\frac{1}{2}}$ est l'unique nombre positif qui, mis au carré, donne x. Autrement dit : $\boxed{x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}}$.

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

donc $x^{\frac{1}{n}}$ est l'unique antécédent positif de x par $t \mapsto t^n$, d'où $\boxed{x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$.

Dans ce paragraphe, on note $f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right.$

Par propriété des puissances, on a $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha\beta}$. On a donc

Proposition 19.
Pour tout $\alpha \neq 0$, f_α réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, et sa bijection réciproque est $f_{\frac{1}{\alpha}}$.

Preuve : On a $f_\alpha \circ f_{1/\alpha} = f_1 = id = f_{1/\alpha} \circ f_\alpha$ donc $f_\alpha^{-1} = f_{1/\alpha}$

Proposition 20.
Par composition de fonctions dérivables, f_α l'est et

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \ f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$$

qui est du signe de α de sorte que si :

- $\alpha = 0$, f_α est constante,
- $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante, de limite $+\infty$ en 0 et de limite nulle en $+\infty$.
- $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante, de limite 0 en 0 et de limite $+\infty$ en $+\infty$.

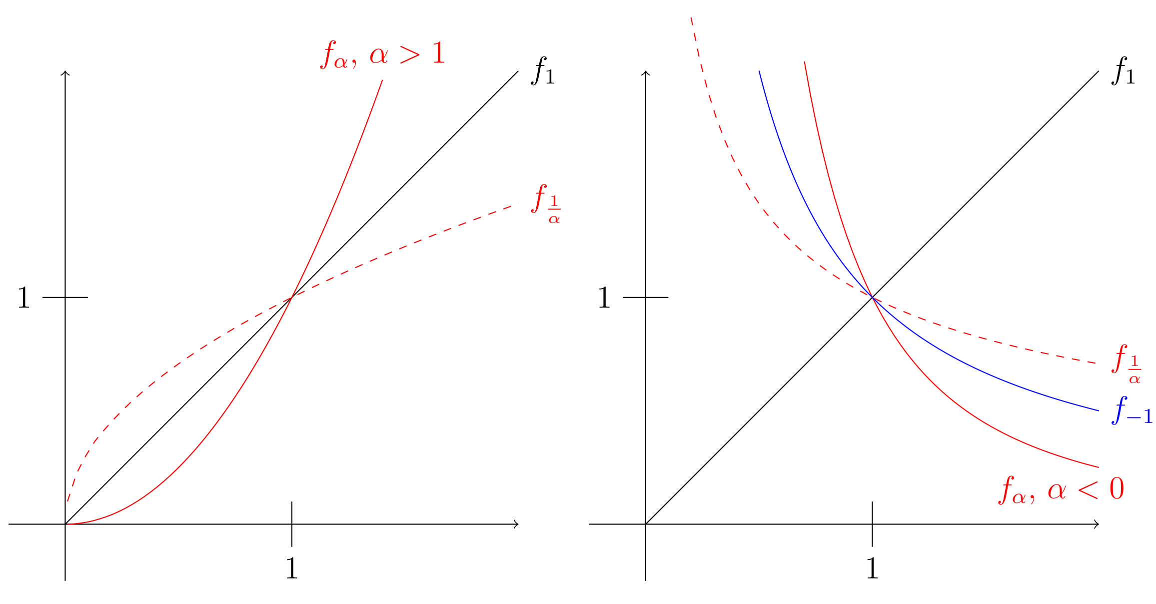
Exemples 15.

1. *Dérivée de* $x \mapsto (\sin(x))^x$ *sur* $]0,\pi[$.
2. *Dérivée de* $x \mapsto (x^2+1)^{2x-3}$ *sur* $\mathbb{R}$.

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)}$$

Proposition 21.
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha > \beta$, alors

- $\forall x \in]0,1[$, $f_\alpha(x) > f_\beta(x)$.
- $\forall x \in]1,+\infty[$, $f_\alpha(x) < f_\beta(x)$.



4 Croissances comparées

Proposition 22.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

Corollaire 23.
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, b\in\mathbb{R}_+^\star$, on a :

- Si $\beta>0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\beta\,|\ln(x)|^\alpha=0$.
- Si $b>1$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{b^x}{x^\alpha}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} b^x\,|x|^\alpha=0$.
  En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x.\,|x|^\alpha=0$.

Exemple 16. *On a* $e^x+\ln(x)\sim_{+\infty}e^x$, $x^2+\ln(x)\sim_{+\infty}x^2$, $e^x+x^{17}\sim_{+\infty}e^x$.

5 Logarithme en base a

Définition 6. Soit a un réel strictement positif différent de 1. La fonction logarithme en base a, notée $\log_a$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation

$$\boxed{\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

Remarque fondamentale : ainsi définie, cette fonction $\log_a$ vérifie le fait que pour tout réel strictement positif x et tout réel y, on a l'équivalence

$$\boxed{a^y=x\Longleftrightarrow y=\log_a(x)}$$

En effet $a^y=e^{y.\ln a}$, donc il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} a^y=x \quad&\Leftrightarrow\quad e^{y.\ln a}=x\\ &\Leftrightarrow\quad y.\ln a=\ln x \quad\Leftrightarrow\quad y=\tfrac{\ln(x)}{\ln(a)}\quad \text{OK}\end{aligned}$$

Autrement dit, tout comme ln qui est la fonction réciproque de $y\mapsto e^y$, la fonction $\log_a$ est la fonction réciproque de la fonction $y\mapsto a^y$. ln peut être alors vue comme étant la fonction logarithme en base e.

Exemple remarquable : la fonction logarithme en base 10 est notée logiquement $\log_{10}$ et est définie pour $x>0$ par

$$\boxed{\log_{10}(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}}$$

Il s'agit de la fonction réciproque de $y\mapsto 10^y$, de sorte que pour tout $y\in\mathbb{R}$ on a $\log_{10}(10^y)=y$, et pour tout $x>0$ on a $10^{\log_{10}(x)}=x$.
Cette fonction est utilisée dans d'autres sciences, comme la SI (diagramme de Bode) ou la chimie, où par exemple le pH d'une solution est défini par la relation

$$pH=-\log_{10}\left([H^+]\right)$$

En informatique, vous avez peut-être croisé le logarithme en base 2, qui donne par exemple le nombre de chiffres dans l'écriture binaire d'un entier naturel n. En effet, n possède c chiffres dans cette écriture si et seulement si $2^{c-1}\leqslant n<2^c$ ce qui équivaut encore par stricte croissance de $\log_2$ à

$$c-1\leqslant\log_2(n)<c$$

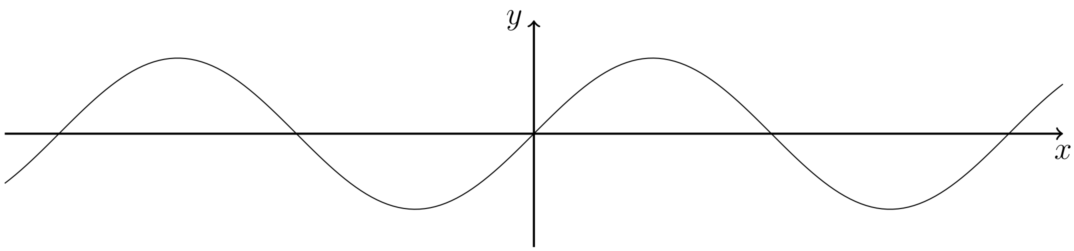
et donc $c=\lfloor\log_2(n)+1\rfloor$.

III Fonctions circulaires et réciproques

1 sin, arcsin

Rappel: La fonction sin est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, impaire et 2π-périodique. Son image vaut $[-1,1]$ et sa dérivée cos.

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x\to 0}(x^4)}$$



La restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est continue, strictement croissante et $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$. On a donc $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}^{[-1,1]}$ bijective.

On a donc

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin(x)) = x \text{ et } \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x}$$

Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction sin, on en déduit quelques valeurs de la fonction arcsin :

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

et donc

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Exemple 17. *Que vaut* $\arcsin(\sin(x))$ *si* $x \in [0, \pi]$*?*

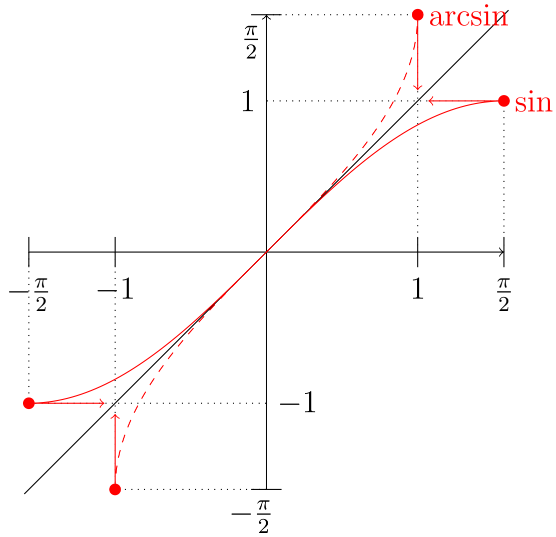
Proposition 24.

- La fonction arcsin est impaire, strictement croissante et continue.
- Elle est dérivable en tout point de $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Elle n'est dérivable ni en 1 ni en -1 mais son graphe admet en ces points des tangentes verticales

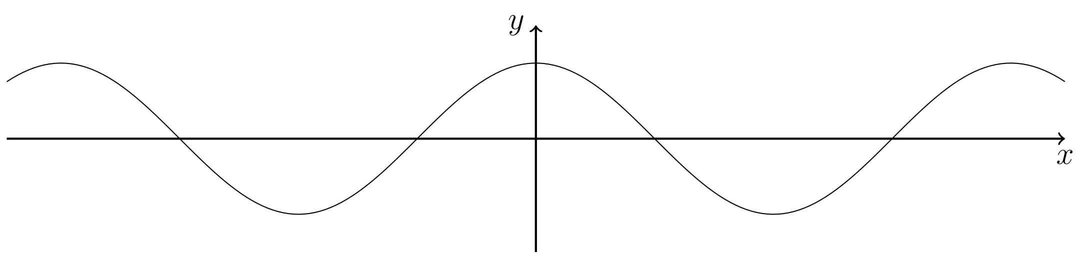
’ On a $\arcsin(x) > 0$ pour tout $x > 0$.



2 cos/arccos

Rappel: La fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante sur $[-\pi, 0]$, paire et 2π-périodique. Son image vaut $[-1, 1]$ et sa dérivée $-\sin$.

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^3)}$$



La restriction de cos à $[0, \pi]$ est continue, strictement décroissante et $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. On a donc $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$ bijective.

Définition 7. Pour tout $y \in [-1, 1]$, on note $\arccos(y)$ l'unique antécédent dans $[0, \pi]$ de y par cos. On définit ainsi une fonction :

$$\arccos : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array} \right. ,$$

qui vérifie $\mathrm{Im}(\arccos) = [0, \pi]$.
Remarque: La fonction $\arccos|^{[0,\pi]}$ est la bijection réciproque de $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$.

On a donc

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \text{ et } \forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x}$$

Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction cos, on en déduit quelques valeurs de la fonction arccos :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

et donc

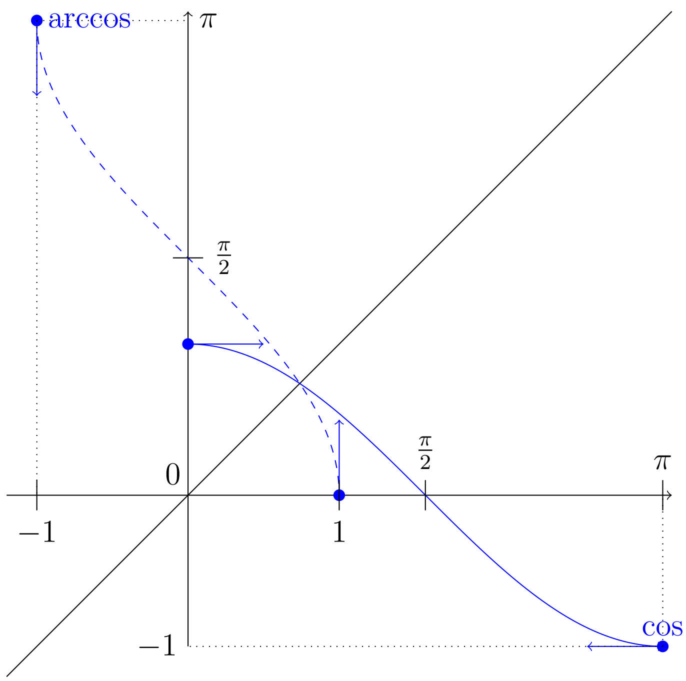
x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arccos(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Proposition 25.

- La fonction arccos est strictement décroissante et continue.
- Elle est dérivable en tout point de $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Elle n'est dérivable ni en 1 ni en -1 mais son graphe admet en ces points des tangentes verticales



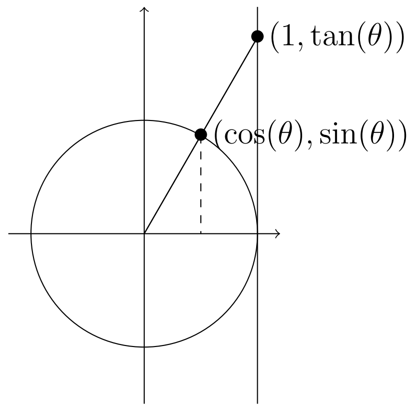
Proposition 26.
Pour tout $x \in [-1,1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

3 tan, arctan

Définition 8. On définit la fonction

$$\tan : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$

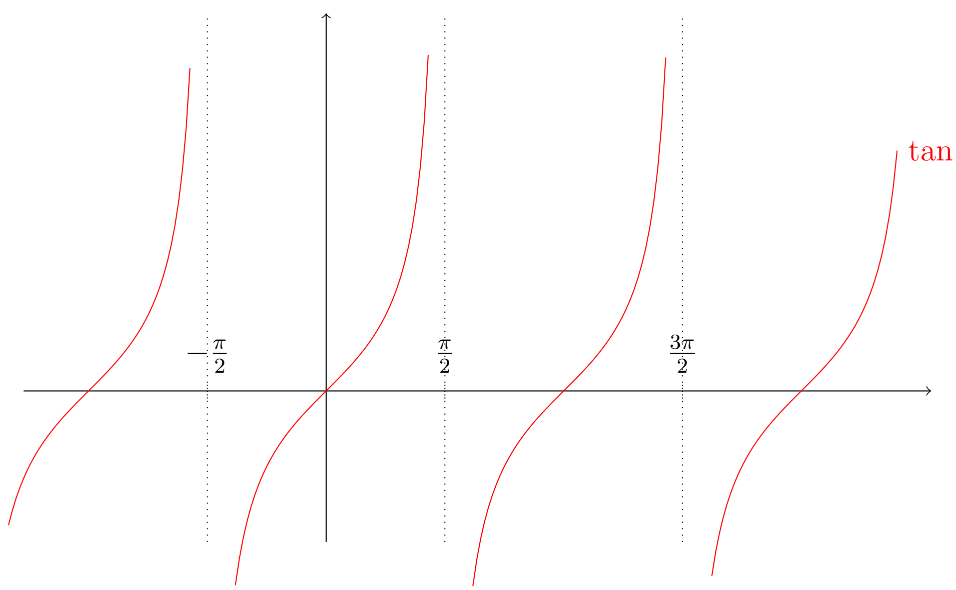
$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^4)}$$



Proposition 27.

- La fonction tan est strictement croissante, π-périodique et impaire.
- Elle est dérivable sur son domaine de définition et
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
- On a $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$.

’ On a $\arctan(x) > 0$ pour tout $x > 0$.



Définition 9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\arctan(x)$ l'unique antécédent dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de tan. On définit ainsi une fonction
$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{cases},$$
avec $\mathrm{Im}(\arctan) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Remarque la fonction $\arctan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est la bijection réciproque de $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$. On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \tan\arctan(x) = x \text{ et } \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x}$$

Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction tan, on en déduit quelques valeurs de la fonction arctan :

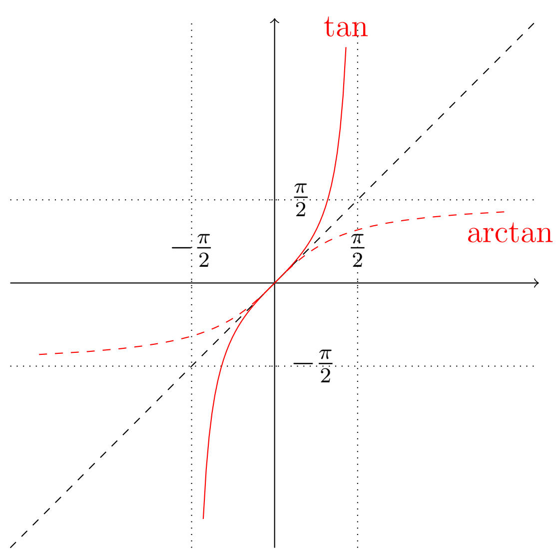
θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(\theta)$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

et donc

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Proposition 28.

- La fonction arctan est impaire, strictement croissante et continue.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.



Proposition 29.

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

IV Fonctions hyperboliques

Définition 10. Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notée respectivement ch et sh, sont les parties paire et impaire de la fonction exponentielle. Elles sont donc définies sur $\mathbb{R}$

par les relations :

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

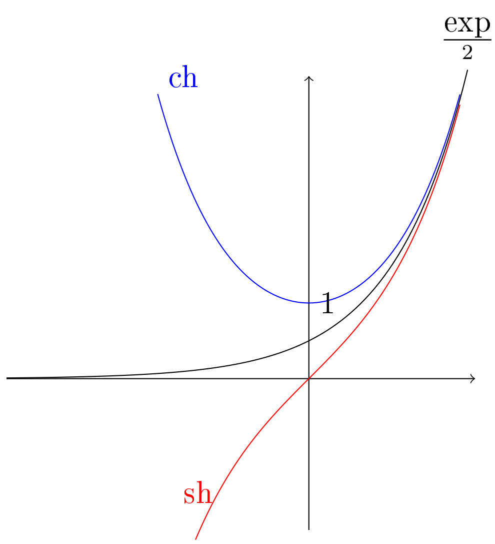
Théorème 30.
- *ch est paire, sh est impaire.*
- *$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = ch(x) + sh(x)$ et $e^{-x} = ch(x) - sh(x)$.*
- *Les fonctions ch et sh sont dérivables et $ch' = sh$, $sh' = ch$.*

On a

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^3) \text{ et } \mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + o_{x\to 0}(x^4)}$$

Proposition 31 (relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1.$$



V Exponentielle complexe

Définition 11. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On appelle partie réelle et partie imaginaire de f les fonctions :

$$\mathcal{R}e(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{R}e\,(f(x)) \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{I}m(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathcal{I}m\,(f(x)) \end{array} \right. .$$

Exemple 18. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & 2x + 3ix^2 \end{array} \right. .$

Définition 12. Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont dérivables sur I, alors on dit que f est dérivable sur I et on pose

$$\forall a \in I, f'(a) = \mathcal{R}e(f)'(a) + i\mathcal{I}m(f)'(a).$$

On définit ainsi une fonction appelée dérivée de f.

Définition 13. Pour tout $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x e^{iy}$ c'est-à-dire $e^z = e^x (\cos(y) + i\sin(y))$.

Proposition 32.
Soit $u : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable en a, alors la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array} \right.$ est dérivable en a, de dérivée $f'(a) = u'(a)e^{u(a)}$.

Corollaire 33.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $x \mapsto e^{\alpha x}$ se dérive en $x \mapsto \alpha e^{\alpha x}$.

Exemple 19. *Déterminer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.