Nombres complexes

1 Rappels.

1.1 Conjugué et module

Définition 1. Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit sous la forme $z = a + i\,b$ où a et b sont des réels (forme algébrique du nombre complexe), a s'appelle la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z. On les note : $a = \mathcal{R}e\,(z)\,,\ b = \mathcal{I}m\,(z)\,.$

Notations: On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Définition 2. Si $z = ib$ avec b réel, on dit que z est un imaginaire pur.

Définition 3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit le conjugué de z, noté $\overline{z}$ par : $\overline{z} = a - i\,b$.

L'application qui à z associe son conjugué est bijective et sa bijection réciproque est elle-même ($\overline{\overline{z}} = z$).

Proposition 1.
$\forall\ (u, v) \in \mathbb{C}^2$,

- $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$
- $\overline{u.v} = \overline{u}.\overline{v}$,
- $\overline{\left(\dfrac{u}{v}\right)} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{v}}$ si $v \neq 0$.

Proposition 2.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\mathcal{R}e\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \mathcal{I}m\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,i}.$$

Définition 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle module de z, noté $|z|$, le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z.\overline{z}}$.

Notations: On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Cela correspond au cercle trigonométrique.

Proposition 3.
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.

- $|\,z\,|^2 = z.\overline{z}$
- $\forall\,(u, v) \in \mathbb{C}^2\ , |uv| = |u|.|v|$
- Si $v \neq 0$, $\left|\,\dfrac{u}{v}\,\right| = \dfrac{|\,u\,|}{|\,v\,|}$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Proposition 4.
Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $|\mathcal{R}e(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathcal{R}e(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $|\mathcal{I}m(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathcal{I}m(z)| = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Théorème 5 (Inégalité triangulaire)**.** *Soit* $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, *alors*

- $|\, u + v \,| \leqslant |\, u \,| + |\, v \,|$ *et*
- $|\, u + v \,| = |\, u \,| + |\, v \,|$ *si et seulement si* u *et* v *sont colinéaires.*

Corollaire 6.

- *Pour tout* $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, *on a* $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |z_i|$.

Exemples 1.

1. *Montrer que pour tout* $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $|1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geqslant 1$.
2. *Montrer que pour tout* $z \notin \mathbb{U}$, *on a* $\left|\dfrac{1 - z^n}{1 - z}\right| \leqslant \dfrac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$

Corollaire 7.
$\forall u, v \in \mathbb{C}$, $|u| - |v| \leqslant |u - v|$

1.2 Écriture exponentielle

Notation: Pour tout réel θ, on note $e^{i\,\theta}$ le nombre complexe : $e^{i\,\theta} = \cos\,\theta + i\,\sin\,\theta$.
Ainsi, son conjugué s'écrit $\overline{e^{i\,\theta}} = \cos\,\theta - \,i\,\sin\,\theta = \cos\,(-\theta) + i\,\sin\,(-\theta) = e^{-\,i\,\theta}$.

Proposition 8 (Formules d'Euler)**.** *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-\,i\,\theta}}{2} \ \text{ et } \ \sin\theta = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-\,i\,\theta}}{2\,i}.$$

Proposition 9 (Formule de Moivre)**.** $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *et* $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\left(e^{i\,\theta}\right)^n = e^{i\,n\,\theta},$$

ce qui s'écrit encore

$$(\cos\,\theta + i\,\sin\,\theta)^n = \cos\,(n\,\theta) + i\,\sin\,(n\,\theta)$$

Applications :

- Linéariser $\cos^2 x$, $\sin^3 x$.
- Linéariser $\cos^n x$.

1.3 Argument

Définition 5. Tout complexe z de module 1 admet une écriture $z = \mathrm{e}^{i\,\theta}$.

Le réel θ n'est pas unique. Cela signifie que l'application $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow U \\ \theta \longmapsto e^{i\theta} \end{array} \right.$ est surjective mais non injective.

Définition 6. Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ où $r > 0$ désigne le module de z. On dit que θ est un argument de z : θ est définit à 2π près. On le choisit souvent entre $-\pi$ et π ou entre 0 et 2π.
On a donc : $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.

Proposition 10.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$.
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Exemple 2. Comment traduire $z \in \mathbb{R}^+$?

Proposition 11.
Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$,

- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$,
- $\arg(z.z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$.

1.4 Géométrie

Définition 7. A tout point $M\ (x, y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + i\,y$ appelé affixe du point M. Le point M est appelé image du complexe z.

On a alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |\,z\,| = r$ et une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}\right)$ est l'argument de z.
Cela implique $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Définition 8. Si $M\,(u)$ et $N\,(v)$ sont deux points du plan, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égale à $v - u$.

Exemples 3.

1. *L'ensemble des points $M\,(z)$ tels que : $|\,z - a\,| = |\,z - b\,|$ est la médiatrice du segment $[A\,(a)\,, B\,(b)]$.*
2. *L'ensemble des points $M\,(z)$ tels que : $|\,z - a\,| = r > 0$ est le cercle de centre $A\,(a)$ et de rayon r.*

Proposition 12.
Soit A, B, C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. A, B et C sont alignés.
2. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
3. $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

2 Trigonométrie

2.1 Factorisation par l'arc moitié

Proposition 13.
Soit p, q deux réels, on a :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2e^{\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } e^{ip} - e^{iq} = 2ie^{\frac{p+q}{2}} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

En particulier, on a :

$$1 + e^{iq} = 2e^{\frac{iq}{2}} \cos\left(\frac{q}{2}\right) \text{ et } 1 - e^{iq} = -2ie^{\frac{iq}{2}} \sin\left(\frac{q}{2}\right).$$

Exemples 4.

1. *Calculer* $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$
2. *Calculer* $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ *avec* $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

2.2 Formules de trigonométrie

Proposition 14.
Soit a, b réels, on a :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

on en déduit

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \text{ et } \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Proposition 15.
Soit p, q deux réels, on a :

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } \sin(p)+\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

3 Équations complexes

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe

La fonction réelle notée par $\sqrt{\ }$ n'existe pas sur $\mathbb{C}$, néanmoins:

> **Théorème 16.** *: tout nombre complexe Z admet deux "racines carrées", opposées, $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ telles que $z_1^2 = z_2^2 = Z$ et $z_1 = -z_2$.*

Remarque: Si $Z \in \mathbb{R}^+$ alors $z_1 = \sqrt{Z}$ et $z_2 = -\sqrt{Z}$.

Pour les trouver:

1. si Z peut se mettre sous forme exponentielle, alors $Z = re^{i\theta}$ et ses racines carrées sont $\pm\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$.

2. Sinon, on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z = a + ib$. Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ xy \text{ du signe de } b \end{cases}$$

Exemples 5.

1. *Déterminer les racines carrées de* $i\sqrt{3}$,

2. *Déterminer les racines carrées de* $1 - i$,

3. *Déterminer les racines carrées de* $2 + 3i$.

3.2 Polynômes

> **Proposition 17.**
> Soit P un polynôme à coefficients complexes, alors $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si P peut s'écrire $P(X) = (X - a)Q(X)$ avec $Q(X)$ un polynôme à coefficients complexes.

Exemple 6. *Résoudre* $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

> **Proposition 18.**
> Le polynôme $aX^2 + bX + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^2$ possède dans $\mathbb{C}$ deux racines (qui peuvent être confondues). Elles s'écrivent : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ où δ est l'un des deux nombres complexes vérifiant : $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque: On appliquera donc l'une des deux techniques développées dans la section précédente pour déterminer δ.

Exemples 7.

1. *Résoudre* $2x^2 - 3x + 4 = 0$, *puis factoriser* $2X^2 - 3X + 4$.

2. *Résoudre* $x^2 + (1 - i)x - i = 0$

> **Proposition 19** (Les formules de François Viète)**.**
> *x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$ ssi $x_1 + x_2 = S$ et $x_1.x_2 = P$.*

Exemples 8.

1. *Résoudre* $x^2 - 9x + 8 = 0$ *sans calculer le discriminant.*

2. *Résoudre* $\begin{cases} x + y & = & 5 \\ xy & = & 3 \end{cases}$

3.3 Racines n-ièmes de l'unité

Dans tout ce paragraphe n désigne un entier naturel non nul.

Définition 9. On dit que c'est une racine n-ième de l'unité si $z^n = 1$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Exemple 9. *Déterminer* $\mathbb{U}_1$ *et* $\mathbb{U}_2$

Théorème 20 (Description des racines n-ièmes de l'unité)**.** *Soit n un entier naturel non nul. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont les complexes ω_k définis par*

$$\omega_k \;=\; e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ \textit{avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$

De plus, ω_1 est un "générateur" de ces nombres au sens où

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \omega_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega_1^k.$$

Exemple 10. *Expliciter* $\mathbb{U}_3$, $\mathbb{U}_4$ *et* $\mathbb{U}_5$.

Notations: On note j le complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Proposition 21.

Pour $n \geqslant 2$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ vaut 0. Autrement dit $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} 0$, ou encore " la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Exemple 11. *Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.*

Proposition 22.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $w_k = \overline{w_{n-k}}$.

Remarque : Si $n = 2m$, on a $w_m = \overline{w_m}$ ce qui est cohérent puisque $w_m = -1$ (qui est réel !)

3.4 Racines n-ièmes d'un complexe non nul.

Définition 10. Soit a un complexe. On dit qu'un complexe z est une racine n-ième de a si $z^n = a$.

Théorème 23 (Description des racines n-ièmes d'un complexe non nul)**.**
Soit z_0 un complexe non nul. Il existe exactement n racines n-ièmes de z_0. En outre, si $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, alors les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = z_0$ sont les :

$$\omega_k(z_0) = \underbrace{\left(\sqrt[n]{r_0}\, e^{i\theta_0/n}\right)}_{\substack{\textit{une racine } n\textit{-ième} \\ \textit{évidente de } z_0}} \times \underbrace{\omega_k}_{\substack{\textit{racines } n\textit{-ièmes} \\ \textit{de l'unité}}} \qquad \textit{avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

Exemples 12.

1. *Déterminer — et dessiner — les complexes z tels que* $z^4 = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}i$.

2. *soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les complexes z tels que*

$$(i+z)^n = (i-z)^n$$