Primitives et ED

1 Primitives

1.1 Notation intégrale

On sait que toute fonction continue f admet une primitive et que $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Parfois, on veut juste travailler avec UNE primitive et ne pas s'encombrer d'une constante. La notation $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (sans borne en bas) désigne une primitive de f (de variable x).

Exemples 1.

1. $\int^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x)$
2. $\int^x (1+t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+x)^2$

Cette notation a un gros inconvénient: elle peut désigner deux fonctions qui ne sont égales qu'à constante près. Par exemple, on a aussi $\int^x (1+t)\,\mathrm{d}t = t + \frac{1}{2}x^2$.

1.2 Calcul de primitives

On a vu qu'il y a différents moyens de calculer une intégrale: IPP, changement de variable. On va, bien sûr, utiliser ces méthodes pour les calculs de primitives. On procèdera comme pour une intégrale mais en modifiant seulement sur la borne supérieure.

Exemples 2.

1. *Calcul de* $\int^x te^t\,\mathrm{d}t$.
2. *Calcul de* $\int^x \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$.

1.3 primitive de fractions rationnelles

ECRIRE LES TROIS CAS + EXEMPLES !!!!!

2 Équations différentielles d'ordre 1

2.1 Définition et structure de l'ensemble des solutions

Définition 1. Soit $a : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On considère l'EDL d'ordre 1 (E) et l'équation homogène associée (E_H) :

$$y' + a(t)y = f \qquad (E)$$
$$y' + a(t)y = 0 \qquad (E_H)$$

Une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ est dite **solution** de (E) si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie :

$$\forall t \in I\,,\ y'(t) + a(t)y(t) = f$$

Remarque. *L'ensemble des solutions est donc un ensemble de fonctions !!*

Théorème 1 (Principe de superposition)**.** *Si une fonction y_1 est une solution de l'équation $y' + a(t)y = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y' + a(t)y = f_2(t)$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ est solution de l'équation $y' + a(t)y = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.*

Conséquence : Si y_P est une solution particulière de (E), alors pour toute autre solution y de (E), la fonction $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t) = 0$, c'est-à-dire solution de (E_H). On a donc

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

2.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 2.
Notons $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a. Les solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : t \mapsto C\, e^{-A(t)} \qquad \text{où } C \text{ est une constante de } \mathbb{K}$$

Exemples 3.

1. $y' + y = 0$.
2. $y' + ty = 0$.
3. $y' + \dfrac{1}{t} y = 0$.

2.3 Recherche d'une solution particulière

Méthode 1.
On se place dans le cas $y' + ay = f(t)$, où $a \in \mathbb{K}^*$ est constant.

- si f est constante, chercher y_P constante.
- si f est polynomiale, chercher y_P polynomiale, de même degré.
- si $f : t \mapsto e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :
  - si $\alpha \neq -a$ chercher y_P de la forme $\lambda e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$;
  - si $\alpha = -a$ chercher y_P de la forme $\lambda t e^{\alpha t}$;
- si a est réel et $f(t) = \sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, chercher y_P de la forme $\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exemples 4.

1. *Trouver une solution particulière de* $y' + y = e^{2x}$.
2. *Trouver une solution particulière de* $y' + y = e^{-x}$.
3. *Trouver une solution particulière de* $y' + y = 2e^{-x} + 3e^{x}$.
4. *Trouver une solution particulière de* $y' - y = \cos(x)$.

Théorème 3 (variation de la constante)**.** *Si A est une primitive de a sur I, alors une solution particulière de (E) est la fonction :*

$$y_P : t \mapsto C(t)\, e^{-A(t)} \qquad \textit{où la fonction } C \textit{ est une primitive de } f.e^{A}$$

Remarque. $e^{-A(t)}$ *est solution de (E_H), son expression a donc déjà été simplifiée en déterminant les solutions de l'équation homogène.*

Exemples 5.

1. *Trouver une solution particulière de* $y' + y = \cos(x)e^{x}$.
2. *Trouver une solution particulière de* $y' + \dfrac{1}{x} y = 3x$.
3. *Trouver une solution particulière de* $y' + \dfrac{1}{t} y = \ln(t)$.

2.4 Résolution de l'équation complète

Théorème 4.
Les fonctions $I \to \mathbb{K}$ solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

où y_H est une solution de l'équation homogène (E_H) et y_P est une solution particulière de (E).

Exemple 6. *Résoudre les équations du paragraphe précédent.*

On peut aussi passer aux complexes pour résoudre une équation réelle.

Exemple 7. *Résoudre $y' - y = \cos(x)$ en résolvant l'équation $y' - y = e^{ix}$.*

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

3.1 Définition et structure de l'ensemble des solutions

Définition 2. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On considère l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants (E) et l'équation homogène associée (E_H) :

$$y'' + ay' + by = f(t) \qquad (E)$$

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (E_H)$$

Théorème 5 (Principe de superposition)**.** *Si une fonction y_1 est une solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1(t)$ et y_2 est solution de $y'' + ay' + by = f_2(t)$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues, alors pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$.*

Conséquence : Si y_P est une solution particulière de (E), alors pour toute autre solution y de (E), la fonction $y_H = y - y_P$ est solution de l'équation différentielle avec second membre $f(t) - f(t) = 0$, c'est-à-dire solution de (E_H). On a donc

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

3.2 Résolution de l'équation homogène

Définition 3. On appelle **équation caractéristique associée à** $y'' + ay' + by = 0$ (c'est-à-dire $(\mathbf{E_H})$) l'équation polynomiale

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0} \qquad \text{notée } (E_c)$$

Théorème 6 (Solutions de (E_H) à valeurs complexes)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On note Δ le discriminant de (E_c).*

- ***Si* $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$**, *on note r_1 et r_2 les deux racines complexes de (E_c) et les solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme :*
$$y_H : t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$
- ***Si* $\boldsymbol{\Delta = 0}$**, *on note r_0 la racine double et les solutions de (E_H) sont :*
$$y_H : t \mapsto (C_1 + C_2 t) e^{r_0 t} \qquad \text{où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$$

Théorème 7 (solutions de (E_H) à valeurs réelles)**.** *On suppose ici que $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^\mathbf{2}$. Soit Δ le discriminant de (E_c) (forcément réel, lui aussi).*

- ***Si* $\boldsymbol{\Delta > 0}$**, *on note r_1 et r_2 les deux racines réelles de (E_c) et les solutions de (E_H) sont de la forme :*

$$y_H \ : \ t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- ***Si* $\boldsymbol{\Delta = 0}$**, *on note r_0 la racine réelle double et les solutions de (E_H)sont :*

$$y_H \ : \ t \mapsto (C_1 + C_2 t)e^{r_0 t} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

- ***Si* $\boldsymbol{\Delta < 0}$**, *alors les deux racines de (E_c) sont complexes conjuguées, notées $r + i\omega$ et $r - i\omega$, où $(r, \omega) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de (E_H)sont alors les fonctions de la forme :*

$$y_H \ : \ t \mapsto (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))\, e^{rt} \qquad \text{où} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exemples 8.

1. *Résoudre $y" - 2y' + y = 0$*
2. *Résoudre $y" - 3y' + 2y = 0$.*
3. *Donner les solutions réelles et complexes de $y" + y' + y = 0$.*

3.3 Recherche d'une solution particulière

Méthode 2.

- si f est une fonction constante, chercher y_P constante.
- si f est polynomiale, identifier le terme dominant pour déterminer le degré d'une solution polynomiale puis chercher une telle solution.
- si $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P(t)$ un polynôme, alors :
  - si α n'est pas une racine de (EC), chercher $y_P(t) = Q(t)e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, avec Q de même degré que P.
  - si α est une racine simple de (EC), chercher $y_P(t) = Q(t)te^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, avec Q de même degré que P.
  - si α est une racine double de (EC), chercher $y_P(t) = Q(t)t^2e^{\alpha t}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, avec Q de même degré que P.
- si les coefficients a et b sont réels et $f(t) = \sin(\Omega t)$ ou $\cos(\Omega t)$, chercher $y_P(t) = \lambda\cos(\Omega t) + \mu\sin(\Omega t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour aller plus vite, on peut aussi trouver une solution particulière complexe de $y'' + ay' + by = \mathbf{e^{i\Omega t}}$ puis en prendre la partie réelle (si c'est $\cos(\Omega t)$) ou la partie imaginaire (si c'est $\sin(\Omega t)$).

Exemples 9.

1. *Trouver une solution particulière de $y" - 3y' + 2y = xe^{4x}$*
2. *Trouver une solution particulière de $y" - 3y' + 2y = xe^{2x}$.*
3. *Trouver une solution particulière de $y" - 2y' + y = e^x$*

4 Résolution de l'équation complète

Théorème 8.
Les fonctions $I \to \mathbb{K}$ solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

où y_H est une solution de l'équation homogène (E_H) et y_P est une solution particulière de (E).

Exemple 10. *Résoudre les équations données dans le paragraphe précédent.*

Théorème 9.
Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Soit $t_0 \in I$.
Alors pour tout couple $(y_0, v_0) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ sur I qui satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Interprétation physique : *en mécanique du point, l'équation du mouvement ne suffit pas à déterminer la trajectoire de l'objet. Typiquement, on la détermine en utilisant les conditions initiales :* ***position initiale*** *(y_0) et* ***vitesse initiale*** *(v_0).*