Lycée du Parc 842.

Suites numériques

1 Suites numériques

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Généralités

Définition 1. Une suite réelle est une application d'une partie A de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$.
On la note $u : n \in A \longmapsto u(n) = u_n$.
On parlera de la suite u, ou de la suite (u_n) ou encore de la suite $(u_n)_{n\in A}$.
Généralement, $A = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^\star$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie :

- directement : on donne l'expression de u_n en fonction de n

  Exemples 1.
  1. *suite* (u_n) *définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$
  2. *suite* (u_n) *définie par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3+n}{1+n^2}$.

- par la donnée des premiers termes et d'une relation de récurrence.

  Exemples 2.
  1. *suite arithmétique :* $u_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r,\ \ r \in \mathbb{C}$.
  2. *suite géométrique :* $u_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q.u_n,\ \ q \in \mathbb{C}$.
  3. *suite arithmético-géométrique* (u_n) *telle que* $u_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a.u_n + b$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.
  4. *suite* (u_n) *telle que* $(u_0,u_1) \in \mathbb{C}^2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n,\ \ (a,b) \in \mathbb{C}^2$
  5. *suite* (u_n) *telle que* $u_0 = a \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = e^{u_n}$

1.2 Propriétés

Définition 2.
- Une suite (u_n) est constante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.
- Elle est stationnaire s'il existe n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$.
- Une suite (u_n) est périodique de période p lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.

- Une suite réelle (u_n) est majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$ (resp. $u_n \geqslant M$).
- Une suite (u_n) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\,u_n\,| \leqslant M$.
- Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \geqslant u_n$).
- La suite réelle (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

2 Convergence des suites réelles

2.1 Definition

Définition 3. On dit que la suite (u_n) converge vers le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient les u_n, pour tout indice n, sauf pour un nombre fini d'entre eux. Autrement dit, pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N, u_n \in I$. On peut aussi le formuler en explicitant l'intervalle :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, |\, u_n - l \,| < \varepsilon.$$

Définition 4. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall\, A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, u_n > A.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall\, A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, u_n < -A.$$

Proposition 1.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, alors sa limite l est unique.

Définition 5. On dit que la suite (u_n) diverge si elle ne converge pas.

Remarque. *Autrement dit, la suite diverge si elle n'admet pas de limite OU si elle admet une limite infinie.*

Proposition 2.
Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse !!

Exemple 3. *La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais non convergente. Savez-vous le montrer?*

2.2 Propriétés des limites

Proposition 3.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent vers U et V. Alors :

- la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$,
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers ll'
- la suite $(\,|\,u_n\,|\,)$ converge vers $|\,l\,|$.
- Si, $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $l' \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.
- Si f est une fonction continue, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$.

Remarque. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$. La réciproque est, bien entendu, fausse SAUF un cas particulier. lequel?*

Proposition 4.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers l et l'.
Si à partir d'un certain rang n_0, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$, alors $l \leqslant l'$.

Remarque. *Si on a $\forall n \geqslant n_0$, $u_n < v_n$, alors $l \leqslant l'$ (pas d'inégalité stricte !). Penser à $u_n = \dfrac{1}{n} > 0$ qui converge vers 0.*

Proposition 5.
Soit (u_n) une suite convergente de limite un réel l et telle qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant A$. Alors, $l \leqslant A$.

2.3 Théorème de convergence

Proposition 6.
Soit (u_n) une suite convergeant vers 0 et (v_n) une suite bornée. Alors, la suite $(u_n.v_n)$ converge vers 0

Exemples 4.

1. $\left(\dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. $\left((-1)^n \sin\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Proposition 7 (théorème d'encadrement ou des gendarmes)**.** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. On suppose que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l.*

Alors, (v_n) converge aussi vers l.

Exemples 5.

1. $\left(\dfrac{1}{n^2}\lfloor \ln(n) \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. $\left(\dfrac{(-1)^n + n}{n^2+n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 8 (théorème de minoration)**.** *Soit (u_n) et (v_n) des suites telles que, à partir d'un certain rang,*

$$u_n \leqslant v_n,$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors (v_n) tend vers $+\infty$.

Remarque. *On a également le théorème de majoration lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.*

Exemples 6.

1. *Limite de $(\lfloor n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?*
2. *Limite de* $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

Théorème 9 (Théorème de la limite monotone)**.** Toute suite (u_n) croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.

Remarque. *Pour montrer ce théorème, on montre qu'une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) converge vers la borne supérieure (resp. borne inférieure) de l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ mais en pratique, déterminer la borne supérieure de cet ensemble est compliqué donc on retient que ce théorème donne l'existence de la limite mais pas sa valeur. Pour trouver la valeur de la limite, quand c'est possible, il faut utiliser l'unicité de la limite.*

Exemples 7.

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.*
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3(u_n - 1)^2$.*
3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3(u_n - 1)^2$.*
4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (u_n - 1)^2$.*
5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $\ln(u_n) + u_n - 1 = \dfrac{1}{n}$.*
6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $e^{u_n} + u_n = n$.*

2.4 Caractérisation séquentielle

Proposition 10.
Soit A un ensemble non vide majoré (respectivement minoré) de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$ (respectivement $\inf(A)$).

Remarque. *On avait déjà montré le fait qu'un majorant qui est limite d'une suite d'éléments de A était le sup, là on montre la réciproque.*

Proposition 11.
Un ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Remarque: Tout réel est donc limite d'une suite de rationnels.

2.5 Suites extraites

Définition 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemples 8.

1. $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $(u_{n^2+3n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 12.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. *Ce résultat est très utile en contraposée: si on trouve deux suites extraites de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui ont des limites différentes, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Exemples 9.

1. *Montrer que* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*
2. *Que dire de* $\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*?*

La réciproque est fausse mais la convergence de suites extraites peut parfois permettre de conclure:

Proposition 13.
Si $v = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = \left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

- v et w convergent vers la même limite l et
- $\{\varphi(n), n\in\mathbb{N}\} \cup \{\psi(n), n\in\mathbb{N}\} = \mathbb{N}$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.

Exemples 10.

1. *Si* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite, on peut affirmer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
2. *Que dire si* $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite?*

2.6 Suites adjacentes

Définition 7. Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque. *Si deux suites sont adjacentes, alors pour tout* n, $u_n \leqslant v_n$.

Théorème 14.
Deux suites adjacentes convergent et leurs limites sont égales.

Remarque. *Si deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes avec les notations de la définition, alors elles convergent vers la même limite* l *et on a, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$.

Exemples 11.

1. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^\star$, *on pose* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ *et* $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *sont adjacentes. En déduire l'existence de* $\gamma\in\mathbb{R}$ *tel que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n)+\gamma+o(\ln(n))$.
2. *Que peut-on dire de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont adjacentes?*

2.7 Cas des suites complexes

Définition 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexes, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe l si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - l| < \epsilon.$$

Comme pour le cas réel, on montre que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, celle-ci est unique.

Proposition 15.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe, elle converge si et seulement si les suites $(\mathcal{R}eu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathcal{I}mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Preuve: En effet, si $\mathcal{R}eu_n \to a$ et $\mathcal{I}mu_n \to b$, alors

$$|u_n - (a+ib)| = \sqrt{(\mathcal{R}eu_n - a)^2 + (\mathcal{I}m(u_n) - b)^2} \to 0$$

donc $u_n \to a + ib$. Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors

$$|\mathcal{R}eu_n - \mathcal{R}e(l)| \leqslant |u_n - l|$$

et de même pour la partie imaginaire donc $\mathcal{R}eu_n \to \mathcal{R}e(l)$ et $\mathcal{I}mu_n \to \mathcal{I}ml$.

Comme il n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{C}$, on n'a ni le thm de convergence monotone, ni celui des gendarmes, ni celui des suites adjacentes. Il vaut donc mieux se ramener à l'étude de suites réelles en considérant sa partie réelle et sa partie imaginaire.

3 Étude de suites particulières

3.1 Cas des suites arithmético-géométriques

Définition 9. La suite u, de terme général u_n, est une suite arithmético-géométrique s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \alpha.u_n + \beta$$

Théorème 16.
Soit c l'unique solution de $x = \alpha x + \beta$. Alors $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison α.

Exemple 12. *Déterminer l'expression du terme général de la suite définie par* $u_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$.

3.2 Récurrences linéaires d'ordre 2

Définition 10. La suite u, de terme général u_n, est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}^\star$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \alpha.u_{n+1} + \beta u_n$

Définition 11. On définit l'équation caractéristique de la récurrence linéaire par $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ (E_C)

Théorème 17 (expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2). *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls et $\mathcal{L}_2(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n / \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = \alpha.u_{n+1} + \beta u_n\}$. Alors:*

1. *Si (E_c) possède deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2, alors $((x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathcal{L}_2(\mathbb{K})$;*
   Autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{K})$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ unique tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = a(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + b(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les scalaires $a, b \in \mathbb{K}$ sont déterminés par la donnée des premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (u_0 et u_1 ou u_1 et u_2).

2. *Si (E_c) possède une unique solution réelle x_0, alors $((x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nx_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathcal{L}_2(\mathbb{K})$; Autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{K})$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ unique tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = a(x_0^n)_{n\in\mathbb{N}} + b(nx_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les scalaires $a, b \in \mathbb{K}$ sont déterminés par la donnée des premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (u_0, u_1 ou u_1, u_2).*

3. *Si l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées, $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$, alors,$\{(z_1^n), (z_2^n)\}$ est une base de $\mathcal{L}_2(\mathbb{C})$ et $((\rho^n \cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n \sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$.*

   Tout élément de $\mathcal{L}_2(\mathbb{K})$ s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire d'une base et les coefficients de la combinaison linéaire sont déterminés par les premiers termes de la suite.

Exemples 13.

1. *Déterminer le terme général de la suite définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

2. *Déterminer le terme général de la suite définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

3. *Déterminer le terme général de la suite définie par* $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

3.3 Étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 12. Soit f une fonction. On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère les suite (u_n) définies par $u_0 \in I$ et une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur I et I est stable par f.

Remarque. *Le fait que $f(I) \subset I$ assure l'existence de la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que l'intervalle I est stable par f.*

Exemples 14.

1. $u_0 \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

2. $u_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$.

3. $u_0 < 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

Proposition 18.
Si la suite (u_n) converge, sa limite est un point fixe de f c'est-à-dire un réel l qui vérifie $f(l) = l$.

Remarque. *Cela découle de la continuité de f et de l'unicité de la limite.*

Exemple 15. *Soit* $u_0 > 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

Proposition 19.
Si f est croissante, alors la suite (u_n) est monotone.

Remarque. *Si I est un intervalle borné et que f est croissante, le théorème de limite monotone assure la convergence.*

Exemples 16.

1. *Étudier la suite définie par* $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ *avec* $u_0 \geqslant 1$.

Si f est décroissante, l'étude est beaucoup plus compliquée! On se ramène au cas précédent en remarquant que $f \circ f$ est croissante.

Plus précisément, si f est décroissante sur un intervalle stable I et $u_0 \in I$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$ et $g = f \circ f$. On a alors $v_{n+1} = g(v_n)$ avec g croissante.

- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f, alors, comme $f(v_n) = u_{2n+1}$, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de g qui n'est pas un point fixe de f, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exemples 17.

1. *Étudier la suite définie par* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$ *et* $u_0 > 0$.
2. *Étudier la suite définie par* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

4 Comparaison des suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Définition 13. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), ce que l'on note : $u_n = o(v_n)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que : } n \geqslant p \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon\, |v_n|$$

Cela revient à dire (si $v_n \neq 0$) que :

$$u_n = o(v_n) \ \text{ si } \frac{u_n}{v_n} \to 0.$$

Remarque. *On a* $u_n = o(1)$ *si la suite* (u_n) *converge vers* 0.

Notations: On note $u_n = v_n + o(w_n)$ si $u_n - v_n = o(w_n)$.

Proposition 20.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n$, alors

$$u_n \to a \Leftrightarrow u_n = a + o(1).$$

Définition 14. On dit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si :
$u_n = v_n + o(v_n)$, ce qui revient à dire que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.

On note : $u_n \sim v_n$

Remarque. *Ainsi, si* (u_n) *converge vers* l *et si* $u_n \sim v_n$, *alors,* (v_n) *converge aussi vers* l.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même limite, elles ne sont pas forcément équivalentes.

Proposition 21.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to l$, avec $l \neq 0$, alors $u_n \sim l$.

Proposition 22.
Soit $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$, alors

- Si $a > 1$, $n^\alpha = o\left(a^n\right)$
- $a^n = o\left(n!\right),\ a \in \mathbb{R}$
- $n! = o\left(n^n\right)$

On peut, bien sûr, utiliser aussi des DL avec des suites.

Exemple 18. *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$