Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2023-2024
DS 4

Devoir d'entrainement 4.

Exercice 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0\ ,\ f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\ln^n(x)}{x^2}$$

Cet exercice étudie plusieurs questions, toutes en lien avec cette famille de fonctions, mais les différentes parties sont largement indépendantes. Si un résultat d'une partie antérieure doit être utilisé, il sera rappelé par l'énoncé.

Partie I - Étude des f_n

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier la dérivabilité de f_n sur $]0, +\infty[$ et montrer que pour tout $x > 0$, le signe de $f_n'(x)$ se déduit de celui de $\ln^{n-1}(x)$ et de $n - 2\ln(x)$.

2. Dresser le tableau des variations de f_n, contenant les limites aux bords de $]0, +\infty[$, et représenter l'allure du graphe de f_n. On pourra distinguer plusieurs cas.

3. Montrer que la valeur maximale de f_n sur $[1, +\infty[$ est $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$, et en déduire que $y_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}y_n$.

5. Montrer que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie II - Une équation différentielle

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on cherche les fonctions y dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant :

$$\forall x > 0\ ,\ \ y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = f_n(x) \qquad (*)$$

6. Résoudre l'équation homogène associée à cette équation différentielle.

7. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto tf_n(t)$.
On pourra poser le changement de variable $s = \ln(t)$,

8. En déduire une solution particulière de $(*)$, à l'aide de la méthode de la variation de la constante, puis donner toutes les solutions de $(*)$.

9. L'équation $(*)$ admet-elle des solutions positives sur $]0, +\infty[$?

Partie III - Primitives des f_n qui s'annulent en 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, on pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$

10. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, le nombre $F_n(x)$ est bien défini, puis calculer $F_0(x)$.

11. A l'aide d'une intégration par parties, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$:
$$F_{n+1}(x) = F_n(x) - \frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!\,x}$$

12. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, $F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^k(x)}{k!}$.

13. Montrer par ailleurs que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 1$, $0 \leqslant F_n(x) \leqslant (x-1)y_n$.
Rappel : y_n désigne le maximum de la fonction f_n sur $[1, +\infty[$, et on a montré dans la partie I que $y_n \longrightarrow_{+\infty} 0$.

14. En déduire que si $x \geqslant 1$ est fixé, la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

15. En déduire, pour $t \in \mathbb{R}_+$, la limite lorsque $n \to +\infty$ de $U_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

Partie IV - Itération d'un opérateur différentiel

On note E l'ensemble des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ infiniment dérivables, et pour toute fonction $y \in E$, on note $L(y)$ la fonction de E définie par :
$$\forall x > 0\,,\ \big(L(y)\big)(x) = xy'(x) + 2y(x)$$
ou de façon équivalente, en notant X l'application $x \mapsto x$ (définie sur $]0, +\infty[$) :
$$L(y) = Xy' + 2y$$
NB : on pourra bien sûr utiliser cette notation X dans les calculs pour manipuler directement des fonctions, sans variable.

16. Déterminer l'ensemble N_1 des fonctions $y \in E$ telles que $L(y) = 0$ (c'est-à-dire telles que $\forall x > 0$, $\big(L(y)\big)(x) = 0$). On fera le lien avec la fonction f_0.

17. On note N_2 l'ensemble des fonctions $y \in E$ telles que $L(L(y)) = 0$. On fixe dans la suite une fonction $y \in E$.
    (a) Montrer que y appartient à N_2 si et seulement si elle vérifie :
    $$\forall x > 0\,,\ \ x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = 0$$
    (b) On pose la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = y(e^t)$. Justifier que h est bien définie et deux fois dérivable, puis montrer l'équivalence :
    $$y \in N_2 \iff \forall t \in \mathbb{R}\,,\ h''(t) + 4h'(t) + 4h(t) = 0$$
    (c) En déduire une description explicite de N_2. On fera le lien avec f_0 et f_1.

18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $L^n = L \circ \cdots \circ L$ l'application de E dans E obtenue en composant n fois l'application L. On note N_n l'ensemble des fonctions $y \in E$ telles que $L^n(y) = 0$ (ici, 0 désigne la fonction nulle).

    On notera $y^{(k)}$ la dérivée $k$ième de y définie par récurrence en posant $y^{(0)} = y$ et $y^{k+1} = \left(y^{(k)}\right)'$.

    Avec les notations usuelles, on a donc $y^{(1)} = y'$ (dérivée) et $y^{(2)} = y$" (dérivée seconde)

    (a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$, avec $a_n = 1$ (on ne cherchera pas à calculer les autres a_i) tels que :

    $$\forall y \in E\,,\quad L^n(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k y^{(k)}$$

    NB : cette question, qui montre que l'équation $L^n(y) = 0$ est une équation différentielle d'ordre n, n'a en fait pas d'influence sur la suite.

    (b) Montrer pour $n \in \mathbb{N}^*$ que $N_n \subset N_{n+1}$.

    (c) Montrer que $L(f_0) = 0$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L(f_{n+1}) = f_n$.

    (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in N_{n+1} \cap \overline{N_n}$.

    (e) Justifier pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in E$ l'équivalence : $y \in N_{n+1} \Longleftrightarrow L(y) \in N_n$.

    (f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note V_n l'ensemble des fonctions du type

    $$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1}\ ,\quad \text{où } \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$$

    A l'aide de la question précédente, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = V_n$.

Exercice 2.

1 Une condition nécessaire pour la convergence d'un produit infini

1. On suppose que le produit infini $\prod_{k \geqslant 1} u_k$ converge. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ tend vers 1.

2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\forall\, k \geqslant N$, on a $u_k > 0$.

2 Étude d'exemples

3. On suppose pour cette question que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} = (1 + \dfrac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^\star}$.

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer une expression simplifiée de p_n.

    (b) En déduire la nature du produit infini $\prod_{k \geqslant 1} u_k$.

4. Soit $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On suppose pour cette question que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} = (\cos \dfrac{a}{2^n})_{n \in \mathbb{N}^\star}$.

(a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = p_n \sin \dfrac{a}{2^n}$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ une expression simplifiée de p_n en fonction de n et a.

(c) Déterminer la nature du produit infini $\displaystyle\prod_{k\geqslant 1} u_k$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = 1 + a^{2^n}$.

   (a) On suppose $a \geqslant 1$. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

   (b) On suppose $a < 1$.

      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $(1-a^2)p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$.

      ii. Étudier la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

6. Est-il suffisant que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ tende vers 1 pour que le produit infini $\displaystyle\prod_{k\geqslant 1} u_k$ converge ?

3 Une caractérisation de la convergence d'un produit infini

Pour simplifier, on suppose dorénavant que tous les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ sont strictement positifs, c'est-à-dire que $\forall\, k \in \mathbb{N}^\star$, $u_k > 0$.

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$$

7. (a) On suppose que le produit infini $\displaystyle\prod_{k\geqslant 1} u_k$ converge. Démontrer que la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement positive et en déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.

   (b) Réciproquement, on suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{k\geqslant 1} u_k$ converge.

8. On suppose pour cette question que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^\star} = (k^{\frac{1}{k}})_{k\in\mathbb{N}^\star}$.

   (a) Déterminer les variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur son domaine de définition.

   (b) Justifier que $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 3$, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$$

   (c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est minorée à partir d'un certain rang par une suite qui tend vers $+\infty$.

   (d) Quelle est la nature du produit infini $\displaystyle\prod_{k\geqslant 1} u_k$?

4 Un autre critère de convergence d'un produit

On se place dans le cas particulier où il existe une suite $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}^\star} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\star}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\nu_k > 0$ et $u_k = 1 + \nu_k$. Ainsi on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+\nu_k) > 1$$

9. On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \nu_k$$

   (a) Déterminer les variations des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

   (b) Démontrer que $\forall\, x > 0$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $S_n \leqslant T_n \leqslant p_n$.

   (d) Montrer que si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge alors le produit infini $\prod_{k\geqslant 1} u_k$ est convergent.

   (e) Montrer que si le produit infini $\prod_{k\geqslant 1} u_k$ converge alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

10. Soit $a \in]0,1[$. On suppose pour cette question que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^\star} = (1 + a^{2^k})_{k\in\mathbb{N}^\star}$.

   (a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a $2^k \geqslant k$.

   (b) Quelle est la nature du produit infini $\prod_{k\geqslant 1} u_k$?

Correction du DS d'entrainement n 4

Exercice 1 Partie I - Etude des f_n

1. f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

   J'ai vu beaucoup de fois, f_n est dérivable car elle est continue ce qui est TRES faux ! Une fonction dérivable est continue mais la réciproque est fausse. Pensez à la valeur absolue Pour tout $x > 0$, on a alors:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}\frac{\frac{n}{x}\ln^{n-1}(x)\cdot x^2 - 2x\ln^n(x)}{x^4} = \frac{1}{n!}\frac{nx\ln^{n-1}(x) - 2x\ln^n(x)}{x^4}$$
$$= \boxed{\frac{1}{n!}\frac{\ln^{n-1}(x)\big(n - 2\ln(x)\big)}{x^3}}$$

   Comme $x^3 > 0$, le signe de $f_n'(x)$ dépend bien de celui des facteurs $\ln^{n-1}(x)$ et $n - 2\ln(x)$.

   Quand on vous demande de montrer que le signe dépend de ces deux quantités, c'est juste pour vous suggérer de factoriser. On attend donc que vous fassiez apparaître ces deux facteurs !

2. On a par équivalences:

$$n - 2\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant \frac{n}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \leqslant e^{\frac{n}{2}} \qquad \leftarrow \text{par croissance stricte de la fonction exp sur } \mathbb{R}$$

   - Supposons que n est pair (et donc, que $n-1$ est impair).

x	0		1		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$\ln^{n-1}(x)$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$n-2\ln(x)$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$	$\searrow$	0

   Calcul des limites en 0^+ et en $+\infty$:

   On a $\ln(x) \to_{x\to 0^+} -\infty$, donc comme n est pair, $\ln^n(x) \to_{x\to 0^+} +\infty$. De plus, $\frac{1}{x^2} \to_{x\to 0^+} +\infty$, donc par produit, $f_n(x) \to_{x\to 0^+} +\infty$.

   Ce n'est PAS par croissances comparées !!!! En $+\infty$, par croissances comparées, on a $f_n(x) \to_{x\to+\infty} 0$.

   - Si n est impair (et donc, si $n-1$ est pair): on a alors

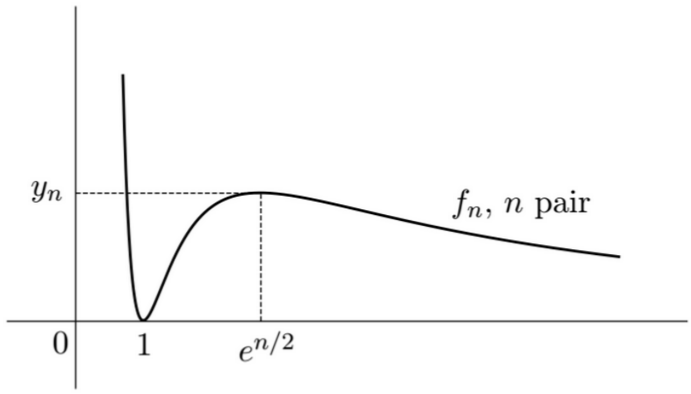
x	0		1		$e^{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$\ln^{n-1}(x)$	||	$+$	0	$+$		$+$	
$n-2\ln(x)$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$f_n'(x)$	||	$+$	0	$+$	0	$-$	
f_n	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$	$\searrow$	0

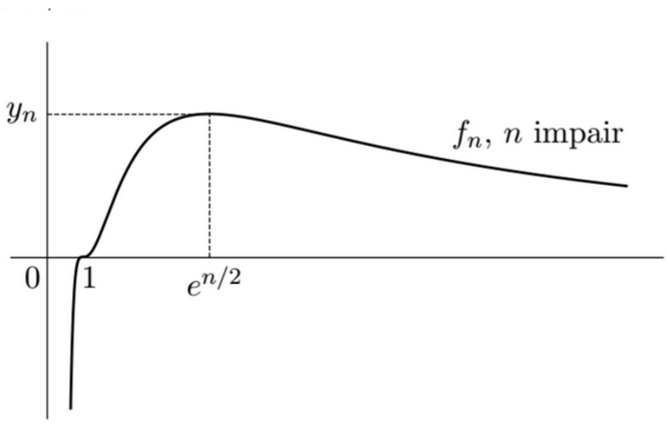
(À noter que $\ln^{n-1}(x)=0$, sauf pour $n=1$), ce qui signifie notamment qu'il y aura une tangente horizontale en $x=1$!.

Calcul des limites en 0^+ et en $+\infty$:

On a $\ln(x) \to_{x\to 0^+} -\infty$, donc comme n est impair, $\ln^n(x) \to_{x\to 0^+} -\infty$. De plus, $\dfrac{1}{x^2} \to_{x\to 0^+} +\infty$, donc par produit, $f_n(x) \to_{x\to 0^+} -\infty$.

En $+\infty$, par croissances comparées, on a $f_n(x) \to_{x\to +\infty} 0$.





3. Quelle que soit la parité de n, sur $[1;+\infty[$, f_n est croissante sur $\left[1;e^{\frac{n}{2}}\right]$ puis décroissante sur $\left[e^{\frac{n}{2}};+\infty\right[$. Le maximum de f_n sur cet intervalle est donc

$$f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{1}{n!}\frac{\ln^n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)}{e^n} = \frac{1}{n!}\frac{n^n}{2^n e^n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

Ainsi, quelle que soit la parité de f_n, le maximum de la fonction sur $[1;+\infty[$ est bien $y_n \ := \ \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'une part :

$$y_{n+1} = f_{n+1}\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{\ln^{n+1}\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}e^{n+1}}$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{2}f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) = \frac{1}{2n!}\frac{\ln^n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{n+1}} = \frac{1}{n!}\frac{(n+1)^n}{2^{n+1}e^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}e^{n+1}}$$

D'où, $\boxed{y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)}$.

Or, on a montré en question 3 que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, y_n est le maximum de la fonction f_n sur $[1; +\infty[$. Cela signifie que, pour tout $t \geqslant 1$, $f(t) \leqslant y_n$. En particulier, pour $t = e^{\frac{n}{2}}$ (qui est bien supérieur ou égal à 1), on a bien

$$f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \leqslant y_n,$$

donc:

$$\boxed{y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right) \leqslant \frac{1}{2} y_n}$$

5. On a montré en question 4 que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} y_n$. Par une récurrence immédiate, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$.

   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n \geqslant 0$. Ainsi, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant y_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$$

   Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \rightarrow_{n \to +\infty} 0$, par le théorème des gendarmes, on en déduit que $y_n \rightarrow_{n \to +\infty} 0$.

   On pouvait aussi dire que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était décroissante, minorée par 0 donc convergente. En notant l sa limite, en passant à la limite dans l'inégalité $y_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} y_n$, on obtient $l \leqslant \frac{l}{2}$ et comme $l \geqslant 0$, par positivité de la suite, on obtient $l = 0$.

Certains m'ont dit $y_n = f_n\left(e^{n/2}\right)$ avec $e^{n/2} \to +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ et ont conclu sur la limite de y_n ce qui est faux. Prenons par exemple $f_n : x \mapsto \frac{n}{x}$, alors pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ et pourtant $f_n(n) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(n) \neq 0$.

Partie II - Une équation différentielle

6. L'équation homogène associée est : $\forall x > 0$, $y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 0$.

   Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto Ce^{-\ln(x)} = \frac{C}{x} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}}$$

7. La fonction $t \mapsto t f_n(t)$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_1^x t f_n(t) \mathrm{d}t$ est une primitive de $t \mapsto t f_n(t)$ sur $]0; +\infty[$ (c'est même la seule qui s'annule en 1).

   Soit donc $x > 0$. On a:

$$\int_1^x t f_n(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \int_1^x \frac{\ln^n(t)}{t} \mathrm{d}t$$

On pose $s = \ln(t)$, $\mathrm{d}s = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. Par changement de variables, on obtient :

$$\int_1^x t f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^{\ln x} s^n \mathrm{d}s = \frac{1}{n!}\left[\frac{s^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\ln x} = \frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

Ainsi, une primitive de $t \mapsto t f_n(t)$ sur $]0;+\infty[$ est $\boxed{x \mapsto \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}}$.

Beaucoup d'erreur dans ce changement de variable

8. Par théorème (méthode de la variation de la constante), une solution particulière de $(*)$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto \dfrac{C(x)}{x}$, où C est une primitive de $x \mapsto f_n(x)e^{\ln(x)}$, *i.e.* $x \mapsto x\, f_n(x)$.

   Par la question 7, $C : x \mapsto \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}$ est une primitive de $x \mapsto x f_n(x)$ sur $]0;+\infty[$. Ainsi, une solution particulière de $(*)$ sur $]0;+\infty[$ est $\boxed{x \mapsto \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!\,x}}$.

   Finalement, les solutions de l'équation $(*)$ sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x \mapsto \frac{C}{x} + \frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!\,x} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}}$$

9. Soit $C \in \mathbb{R}$. Étudions le signe de $f : x \mapsto \dfrac{C}{x} + \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!\,x} = \dfrac{1}{x}\left(C + \dfrac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}\right)$ sur $]0;+\infty[$.

   Soit $x > 0$. On a l'équivalence suivante:

$$\frac{1}{x}\left(C + \frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}\right) \geqslant 0 \Longleftrightarrow C + \frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} \geqslant 0 \qquad \leftarrow \text{car } x > 0$$

   - Si n est impair, alors pour tout $x > 0$, $\dfrac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} \geqslant 0$ donc en choisissant $C \geqslant 0$, l'inégalité ci-dessus est toujours vérifiée. Il existe donc des solutions positives.
   - Si n est pair, alors : $\ln^{n+1}(x) \to_{x\to 0^+} -\infty$; ainsi, quelle que soit la valeur de $C \in \mathbb{R}$, la fonction n'est pas positive sur $]0;+\infty[$.

Partie III - Primitives des f_n qui s'annulent en 1

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$, la fonction f_n est continue sur $[1;x]$ et donc le nombre $F_n(x)$ est bien défini.

    Soit $x > 0$.

$$F_0(x) = \int_1^x f_0(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = \boxed{1 - \frac{1}{x}}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $x > 0$. On a

$$F_{n+1}(x) = \int_1^x f_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)!}\int_1^x \frac{\ln^{n+1}(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

    On pose :

$$u(t) = \ln^{n+1}(t) \qquad\qquad u'(t) = \frac{n+1}{t}\ln^n(t)$$

$$v'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad\qquad v(t) = -\frac{1}{t}$$

Par intégration par parties, on obtient:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[-\frac{\ln^{n+1}(t)}{t}\right]_1^x + (n+1)\int_1^x \frac{\ln^n(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{\ln^{n+1}(x)}{x\,(n+1)!} + F_n(x) \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

Dans la mesure où le résultat est donné, les étapes de votre intégration par parties doivent apparaître clairement

12. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $x > 0$. On a obtenu en question 11 que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$F_{k+1}(x) - F_k(x) = -\frac{\ln^{k+1}(x)}{(k+1)!x}$$

En sommant ces égalités pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(F_{k+1}(x) - F_k(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{\ln^{k+1}(x)}{(k+1)!\,x}$$

donc: $\quad F_n(x) - F_0(x) = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\ln^m(x)}{m!\,x} \quad \leftarrow$ par télescopage, et chgt d'indice $m = k+1$

donc: $\quad F_n(x) - 1 + \frac{1}{x} = -\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{\ln^m(x)}{m!\,x} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{terme en } m=0}\right)$

donc: $\quad F_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\sum_{m=0}^{n}\frac{\ln^m(x)}{m!}$

Beaucoup ont préféré raisonner par récurrence descendante. Assurez-vous que votre raisonnement soit clair et complet.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $x \geqslant 1$.

Dans la question 2, on a montré que pour tout $t \geqslant 1$ (et donc en particulier pour tout $t \in [1, x]$), on a

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant y_n$$

En intégrant entre 0 et x cet encadrement, on obtient :

$$0 \leqslant \int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x y_n \mathrm{d}t = (x-1)y_n$$

c'est-à-dire : $0 \leqslant F_n(x) \leqslant (x-1)y_n$.

Là j'ai été assez compréhensive étant donné que nous avons fait peu d'intégration mais il suffisait d'invoquer la croissance de l'intégrale. J'ai vu pas mal de schéma ou de justification géométrique.

14. Soit $x \geqslant 1$ fixé. On a montré que, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant F_n(x) \leqslant (x-1)y_n$.
Comme $y_n \to_{n\to+\infty} 0$, par le théorème des gendarmes, on en déduit que $F_n(x) \to_{n\to+\infty} 0$.

15. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \geqslant 1$. On a alors $e^t \geqslant 1$, et par la question 12:

$$F_n(e^t) = 1 - \frac{1}{e^t}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}, \quad \text{donc} \quad U_n(t) := \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} = e^t\left(1 - F_n(e^t)\right)$$

Or, par la question 14, on a $F_n(e^t) \to_{n\to+\infty} 0$; donc,

$$U_n(t) \to_{n\to+\infty} e^t$$

Partie IV - Itération d'un opérateur différentiel

16. Il s'agit de trouver les $y \in E$ telles que

$$\forall x > 0\,,\ \ xy'(x) + 2y(x) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x > 0\,,\ \ y'(x) + \frac{2}{x}\,y(x) = 0$$

Par théorème, il s'agit des fonctions du type :

$$x \mapsto \lambda e^{-2\ln(x)} = \frac{\lambda}{x^2}\ ,\quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Autrement dit : $\boxed{N_1 = \{\lambda f_0 \ \mid\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$. Certains m'ont dit que f_0 était un élément de N_1, ce qui est en dessous de la vérité: tous les éléments de N_1 sont des multiples de f_0 !!!

17. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} L(L(y)) &= X\big(L(y)\big)' + 2L(y) \\ &= X\big(Xy' + 2y\big)' + 2\big(Xy' + 2y\big) \\ &= X\big(y' + Xy'' + 2y'\big) + 2Xy' + 4y \qquad \text{car } X' = 1 \\ &= X^2y'' + 5Xy' + 4y \end{aligned}$$

D'où les équivalences :

$$\begin{aligned} y \in N_2 &\iff L(L(y)) = 0 \\ &\iff X^2y'' + 5Xy' + 4y = 0 \\ &\iff \forall x > 0\,,\ \ x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit bien de l'équivalence demandée

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t > 0$ et y est définie sur $]0, +\infty[$. Donc h est bien définie. h est aussi dérivable par composition de fonctions dérivable, et sa dérivée :

$$h\ :\ t \mapsto e^t y'(e^t)$$

est également dérivable par produit et composition de fonctions dérivables.
Par définition de h, on a pour tout $x > 0$:

$$y(x) = h(\ln x)$$

et en dérivant :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{x}h'(\ln x) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2}h'(\ln x) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}h''(\ln x) = \frac{1}{x^2}\left(h''(\ln x) - h'(\ln x)\right) \end{aligned}$$

D'où, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) &= (h''(\ln x) - h'(\ln x)) + 5h'(\ln x) + 4h(\ln(x)) \\ &= h''(\ln x) + 4h'(\ln x) + 4h(\ln(x)) \end{aligned}$$

On a donc l'équivalence suivante :

$$y \in N_2 \iff \forall x > 0\,,\quad h''(\ln x) + 4h'(\ln x) + 4h(\ln(x))$$

Or, lorsque x parcourt l'ensemble $]0, +\infty[$, $\ln(x)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. Cette dernière phrase signifie donc précisément :

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ h''(t) + 4h'(t) + 4h(t) = 0$$

(c) Résolvons cette équation d'ordre 2. L'équation caractéristique, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$, est :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \text{ c'est-à-dire } (r+2)^2 = 0$$

L'unique solution est $r = -2$, et donc les solutions de l'équation sont les fonctions du type :

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{-2t}\ ,\quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

D'où les équivalences :

$$\begin{aligned} y \in N_2 &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}\,,\ h(t) = (\lambda + \mu t)e^{-2t} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x > 0\,,\ y(x) = (\lambda + \mu \ln x)e^{-2\ln x} = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{\mu \ln x}{x^2} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = \lambda f_0 + \mu f_1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{N_2 = \{\lambda f_0 + \mu f_1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}}$

18. (a) Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\mathcal{H}(n)\ :\ \text{" } \exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall y \in E\,,\ \ L^n(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k y^{(k)} \text{ et } a_n = 1 \text{ "}$$

- Initialisation : $\forall y \in E$, $L(y) = Xy' + 2y$, ce qui vaut $a_0X^0y^{(0)} + a_1Xy^{(1)}$ en posant $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$. $\mathcal{H}(1)$ est donc vérifiée.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On écrit alors, pour tout $y \in E$:

$$\begin{aligned}
L^{n+1}(y) &= L(L^n(y)) \\
&= X\left(L^n(y)\right)' + 2L^n(y) \\
&= X\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k y^{(k)}\right)' + 2\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k y^{(k)}\right) \qquad \text{(d'après } \mathcal{H}(n)\text{)} \\
&= X\sum_{k=0}^{n} a_k\left(kX^{k-1}y^{(k)} + X^k y^{(k+1)}\right) + \sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k y^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k k X^k y^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^{k+1} y^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k y^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k k X^k y^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} X^k y^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k y^{(k)} \qquad \begin{pmatrix}\text{chgt d'indice} \\ \text{somme centrale}\end{pmatrix} \\
&= \underbrace{a_n X^{n+1} y^{(n+1)}}_{\text{terme en } k=n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[(k+2)a_k + a_{k-1}\right] X^k y^{(k)} + \underbrace{2a_0 y}_{\text{termes en } k=0}
\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{cases} b_0 := 2a_0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ b_k := (k+2)a_k + a_{k-1} \\ b_{n+1} = a_n = 1 \end{cases}$$

On a bien :

$$\forall y \in E\,,\ L^{n+1}(y) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k X^k y^{(k)}$$

et $\mathcal{H}(n+1)$ est bien démontrée.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $y \in N_n$. Montrons que $y \in N_{n+1}$. On veut montrer que $L^{n+1}(y) = 0$. Comme $y \in N_n$, on a $L^n(y) = 0$. De plus, on a:

$$L^{n+1}(y) = L\left(L^n(y)\right) = L(0) = X \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

On a montré que $y \in N_{n+1}$.

(c)

- ▶ Pour tout $x > 0$, on a $f_0'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on obtient:

$$L\left(f_0\right)(x) = x f_0'(x) + 2f_0(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0$$

  Ceci étant valable pour tout $x > 0$, on a montré que $L(f_0) = 0$.

- ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$, en reprenant le calcul de la question 1, on a:

$$f_{n+1}'(x) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{\ln^n(x)(n+1-2\ln(x))}{x^3}$$

On a ainsi:

$$\begin{aligned}
L\left(f_{n+1}\right)(x) &= x f_{n+1}'(x) + 2 f_{n+1}(x) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{\ln^n(x)\,(n+1-2\ln(x))}{x^2} + \frac{2}{(n+1)!}\frac{\ln^{n+1}(x)}{x^2} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)!}\frac{\ln^n(x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{\ln^n(x)}{x^2} \\
&= f_n(x)
\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $x > 0$, on en déduit que $L(f_{n+1}) = f_n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 18c précédente, on a :

$$\begin{aligned}
& L(f_n) = f_{n-1} \\
\text{donc: } \quad & L^2(f_n) = L(f_{n-1}) = f_{n-2} \\
\text{donc: } \quad & L^3(f_n) = L(f_{n-2}) = f_{n-3} \\
& \quad \vdots \\
\text{donc: } \quad & L^k(f_n) = L(f_{n-(k-1)}) = f_{n-k} \\
& \quad \vdots \\
\text{donc: } \quad & L^n(f_n) = L(f_1) = f_0 \\
\text{donc: } \quad & L^{n+1}(f_n) = L(f_0) = 0
\end{aligned}$$

Les deux dernières lignes montrent que $f_n \in \overline{N_n}$ (puisque $L^n(f_n) \neq 0$) et $f_n \in N_{n+1}$. Autrement dit, $f_n \in N_{n+1} \cap \overline{N_n}$.

Remarque du professeur : ce raisonnement "avec des petits points" est convaincant, mais n'a pas tout à fait la valeur d'une récurrence propre. Il s'agit ici d'une récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$ (n est fixé), où l'hypothèse de récurrence est :

$$\mathcal{H}(k)\ :\ \text{"}L^k(f_n) = f_{n-k}\text{"}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $y \in E$.
On a les équivalences suivantes:

$$y \in N_{n+1} \iff L^{n+1}(y) = 0 \iff L^n(L(y)) = 0 \iff L(y) \in N_n$$

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}(n)$: "$N_n = V_n$". Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

- Initialisation: pour $n = 1$, on a montré à la question 16 que $N_1 = \{\lambda f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = V_1$.
- Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
  Soit $y \in E$. On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned}
y \in N_{n+1} &\iff L(y) \in N_n \qquad \leftarrow \text{par la question } 18e \\
&\iff L(y) \in V_n \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\iff \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \text{ tel que } Xy' + 2y = \lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_{n-1} f_{n-1}
\end{aligned}$$

Ici, isolons la phrase :

$$Xy' + 2y = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1}$$

On remarque qu'il s'agit d'une EDL d'ordre 1. L'équation homogène associée est $Xy' + 2y = 0$. On l'a déjà résolue à la question 16 : les solutions sont les Cf_0, où $C \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière. Par le principe de superposition, il suffit pour cela de déterminer une solution particulière à l'équation différentielle $L(y) = f_i$, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.
Or, par la question 18c, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $L(f_{i+1}) = f_i$; par conséquent, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, une solution particulière de $L(y) = f_i$ est : f_{i+1}.
Ainsi, par le principe de superposition, la fonction $\lambda_0 f_1 + \ldots + \lambda_{n-1} f_n$ est solution particulière.
Finalement, les solutions de l'EDL sont les fonctions $Cf_0 + \lambda_0 f_1 + \ldots + \lambda_{n-1} f_n$, où $C \in \mathbb{R}$.
On a ainsi montré l'équivalence:

$$\begin{aligned} y \in N_{n+1} &\iff \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\,,\ \exists C \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = Cf_0 + \lambda_0 f_1 + \ldots + \lambda_{n-1} f_n \\ &\iff y \in V_{n+1} \end{aligned}$$

Cela prouve $\mathcal{H}(n+1)$.

- Conclusion: par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = V_n$.

Exercice 4 Une condition nécessaire pour la convergence d'un produit infini

1. La fonction $\varphi : n \mapsto n-1$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$ donc la suite $(p_{n-1})_{n \geqslant 2}$ est une suite extraite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$. Or, par hypothèse, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ tend vers ℓ donc la suite extraite $(p_{n-1})_{n \geqslant 2}$ tend également vers ℓ.

   Beaucoup ont supposé que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ admettait une limite différente de 1 (ce que vous ne pouvez faire!). Le seul qui s'est approché d'un raisonnement complet est Elouan qui a traité le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ admettait une limite puis a dit que le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ n'admettait pas de limite pouvait se ramener aux cas précédents car on pouvait trouver une suite extraite qui, elle, admettait une limite. Le résultat est vrai mais savez-vous le montrer? De plus, il utilise un résultat hors programme donc vous ne pouvez pas raisonner ainsi.

   D'après l'énoncé, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $u_k \neq 0$ donc par produit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n \neq 0$. De plus, on remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$. Par hypothèse et d'après la question précédente, les suites $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^\star}$ et $(p_{k-1})_{k \geqslant 2}$ tendent vers ℓ **qui est non nul** donc par quotient, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^\star}$ tend vers $\frac{\ell}{\ell} = 1$.

2. D'après la question précédente, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1. On a $1 > 0$ donc il existe $m > 0$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall k \geqslant N$, $0 < m \leqslant u_k$. On peut le démontrer :
   Par hypothèse, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers tend vers 1, ce qui signifie que $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} :$ $\forall k \geqslant N_\varepsilon, 1 - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant 1 + \varepsilon$.
   On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$. D'après l'hypothèse, il existe et on pose $N \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant N, 1 - \frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant 1 + \frac{1}{2}$.
   Alors, pour tout $k \geqslant N$, on a $0 < 1 - \frac{1}{2} \leqslant u_k$.
   On a démontré que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

Étude d'exemples

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) = n+1$$

car on reconnaît un produit télescopique.

Si vraiment vous ne voyez pas la forme simplifiée, calculer les premiers termes de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

(b) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n = n+1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$. Par définition, le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 1} u_k$ diverge.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{a}{2^n} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est à termes non nuls. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{p_{n+1}\sin\frac{a}{2^{n+1}}}{p_n \sin\frac{a}{2^n}} \\
&= \frac{\cos\frac{a}{2^{n+1}}\sin\frac{a}{2^{n+1}}}{\sin\frac{a}{2^n}} \text{ car } p_{n+1} = u_{n+1}\times p_n \\
&= \frac{1}{2} \text{ car } \sin\left(2\times\frac{a}{2^{n+1}}\right) = 2\sin\frac{a}{2^{n+1}}\cos\frac{a}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

(b) D'après la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, w_n = \frac{w_1}{2^{n-1}}$$

et $w_1 = \cos\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sin(a)}{2}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, w_n = \frac{\sin(a)}{2^n},$$

d'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, p_n = \frac{\sin(a)}{2^n\sin(\frac{a}{2^n})}$$

La suite commence au rang 1, il faut donc être prudent dans la formule. Pensez à tester systématiquement sur le premier rang que votre formule est valable.

(c) On rappelle que $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{2^n} = 0$ donc $\sin\dfrac{a}{2^n} \sim \dfrac{a}{2^n}$ puis $p_n \sim \dfrac{\sin(a)}{a}$ On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{\sin(a)}{a}$. Comme $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(a) \neq 0$. On en déduit que le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est convergent.

5. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n = 1 + a^{2^n}$.

(a) On suppose $a \geqslant 1$.

- Si $a = 1$, on a $u_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ donc, par contraposée de l'assertion " si le produit converge vers une limite non nulle, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers 1", on en déduit que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ diverge. On peut aussi dire que $p_n = 2^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

- Si $a > 1$, alors $u_n > 2$ donc $p_n > 2^n$ et, par le théorème de minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

  J'ai vu aussi chez Maëlle: $p_{n+1} = p_n.u_{n+1} > u_{n+1}$ puisque $p_n > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

Tout argument du style le produit de termes qui divergent est divergent est trop imprécis pour être accepté tel quel.

(b) On suppose $a < 1$.

i. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a^{2^k})$. Pour tout entier k, on a $1-a^{2^{k+1}} = (1-a^{2^k})(1+a^{2^k})$ donc $1+a^{2^k} = \dfrac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a^{2^k}}$. Ainsi,

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a^{2^k}}.$$

On reconnaît un produit télescopique, on a donc

$$p_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2},$$

d'où l'égalité souhaitée :

$$(1-a^2)p_n = 1-a^{2^{n+1}}.$$

On a bien montré

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, (1-a^2)p_n = 1-a^{2^{n+1}}.$$

Beaucoup d'entre vous ont raisonné par récurrence, ce qui marche très bien ou par récurrence descendante (un peu plus coton à rédiger proprement mais ça fonctionne).

ii. On passe à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'égalité de la question précédente. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{2^{n+1}} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{1-a^2}$$

6. On a montré à la question 1 qu'une condition nécessaire pour que le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 1} u_k$ converge est que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers 1. Par contre, cette condition n'est pas suffisante. En effet, dans l'exemple de la question 4, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers 1 mais le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est divergent.

Une caractérisation de la convergence d'un produit infini

7. (a) • Par hypothèse, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers une limite finie non nulle que l'on note ℓ. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, en tant que produit de nombres strictement positifs, $p_n > 0$. D'après la propriété de passage à la limite dans les inégalités, on obtient $\ell \geqslant 0$.
Et comme la limite ℓ est non nulle, on obtient $\ell > 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, d'après l'énoncé, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n} u_k\right) = \ln(p_n)$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \ell$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ le domaine de définition et de continuité de la fonction ln donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(p_n) = \ln(\ell)$. Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.

(b) Réciproquement, d'après l'énoncé, on suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Or, d'après les calculs de la question précédentes, $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = \ln(p_n)$ et donc $p_n = \exp(S_n)$. La fonction exp étant bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \exp(S_n) = \exp(S) > 0$. Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers une limite non nulle. Par définition, le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 1} u_k$ converge.

8. (a) On pose $g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. Cette fonction est définie sur $]0,+\infty[$. Par composition puis quotient, la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

On a $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

On n'écrit pas " par croissances comparées " à côté du 0 de son tableau de variations. On prend la peine de rajouter une ligne : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *par croissances comparées.*

Et on calcule, bien sûr toutes les limites ! et on ne se trompe pas en 0 car ce n'est pas une forme indéterminée.

(b) Soit $k \geqslant 3$, alors g est décroissante sur $[k, k+1]$ d'après le tableau de variations de g. Pour tout $x \in [k, k+1]$, on a donc $\dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$ donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$$

Je suis assez surprise du massacre de cette question. On a pourtant fait régulièrement des inégalités comme ça, non?

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$.
D'après l'énoncé,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\exp(\frac{1}{k}\ln(k))) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Pour tout $k \in [\![3, n]\!]$, d'après la question précédente, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$$

On somme pour k variant de 3 à n :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

D'après la relation de Chasles,

$$\sum_{k=3}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{3}^{n+1}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

donc

$$\int_{3}^{n+1}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k)}{k}$$

Or,

$$\int_{3}^{n+1}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_3^{n+1}=\frac{(\ln(n+1))^2}{2}-\frac{(\ln(3))^2}{2}$$

D'où

$$\frac{(\ln(n+1))^2}{2}-\frac{(\ln(3))^2}{2}\leqslant\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k)}{k}$$

Et en ajoutant $\ln(u_1)+\ln(u_2)=\dfrac{\ln(1)}{1}+\dfrac{\ln(2)}{2}=\dfrac{\ln(2)}{2}$, on obtient

$$\frac{\ln(2)}{2}+\frac{(\ln(n+1))^2}{2}-\frac{(\ln(3))^2}{2}\leqslant S_n$$

On a démontré que $\forall n\geqslant 3$, $\frac{\ln(2)}{2}+\frac{(\ln(n+1))^2}{2}-\frac{(\ln(3))^2}{2}\leqslant S_n$.

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{2}+\frac{(\ln(n+1))^2}{2}-\frac{(\ln(3))^2}{2}=+\infty$$

donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir du rang 3 par une suite qui tend vers $+\infty$.

L'erreur la plus répandue est de sommer les inégalités de 1 à n alors qu'elles ne sont vraies pour pour $k\geqslant 3$.
J'ai aussi vu des passages à la somme avec une équivalence ce qui est, bien entendu, faux!

(d) De ce qui précède, d'après le théorème de divergence par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.
Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ diverge, d'après la contraposée de la question 7)a), le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 1}u_k$ diverge. *Certains ont lu "minorée" et non pas minorée par une suite qui tend vers $+\infty$.*
D'autres, en revanche, ont admis toutes les questions précédentes pour faire celle-ci (bien joué!)

Un autre critère de convergence d'un produit

9. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On a $S_{n+1}-S_n=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln(u_k)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(u_k)=\ln(u_{n+1})=\ln(1+\nu_{n+1})>0$ car $\nu_{n+1}>0$ donc $1+\nu_{n+1}>1$. On a donc $S_{n+1}>S_n$. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On a $T_{n+1}-T_n=\nu_{n+1}>0$ donc $T_{n+1}>T_n$. On en déduit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $p_{n+1} - p_n = ((1+\nu_{n+1}) - 1)p_n = \nu_{n+1}p_n$. Or, $\nu_{n+1} > 0$ et par produit de nombres strictement positifs, $p_n > 0$ donc $p_{n+1} - p_n > 0$ donc $p_{n+1} > p_n$. On peut conclure que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.
On peut, bien sûr, aussi considérer $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + v_{n+1} > 1$ et comme $p_n > 0$ pour tout n, on en déduit que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.

(b) On considère la fonction auxiliaire $h : x \mapsto x - \ln(1+x)$. Cette fonction est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$\forall x \in [0, +\infty[, h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $h'(x) \geqslant 0$ donc la fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $h(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0, +\infty[$, comme $x \geqslant 0$ on a $h(x) \geqslant h(0) = 0$ c'est-à-dire $x \geqslant \ln(1+x)$. A fortiori, pour tout $x > 0$, on a $x \geqslant \ln(1+x)$.

Évidemment, on pouvait aussi dire (Louis, c'était une spéciale pour vous) que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$ car la dérivée de $x \mapsto \ln(1+x)$ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}_+^\star$. En multipliant par $x > 0$, on obtient le résultat souhaité pour $x > 0$, le cas $x = 0$ étant clairement vrai.

(c) • Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\nu_k > 0$ donc d'après la question précédente, $\ln(1+\nu_k) \leqslant \nu_k$. On somme pour k variant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\nu_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \nu_k$$

c'est-à-dire que $S_n \leqslant T_n$.

Attention ! là encore, il n'y a pas d'équivalence entre l'inégalité pour tout k et la somme des inégalités

• On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'assertion $R(n) = [T_n \leqslant p_n]$ est vraie.

Initialisation: Montrons que $R(0)$ est vraie.
On a $T_0 = \nu_0 \leqslant 1 + \nu_0 = p_0$ donc l'assertion $R(0)$ est vraie.

Hérédité: Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, R(n) \Rightarrow R(n+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $R(n)$ est vraie. On a $p_{n+1} = p_n(1+\nu_{n+1}) = p_n + p_n\nu_{n+1} \geqslant T_n + p_n\nu_{n+1}$ d'après $R(n)$. Et $p_n > 1$ et $\nu_{n+1} > 0$ donc $p_n\nu_{n+1} > \nu_{n+1}$ donc $p_n\nu_{n+1} \geqslant \nu_{n+1}$.
On en déduit que $p_{n+1} \geqslant T_n + \nu_{n+1} = T_{n+1}$ c'est-à-dire que $R(n+1)$ est vraie.
On a démontré que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, R(n) \Rightarrow R(n+1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $T_n \leqslant p_n$.
D'après les deux points précédents, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, on a $S_n \leqslant T_n \leqslant p_n$.

(d) On suppose que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.
De plus, d'après la question 9a, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant. Alors, par définition et d'après 9c, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, on a $S_n \leqslant T_n \leqslant M$.
On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée. De plus d'après 9a, elle est croissante.

Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.
Et d'après 7)b), on en déduit que le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 1} u_k$ converge.

(e) On suppose que le produit infini $\prod\limits_{k\geqslant 1} u_k$ converge c'est-à-dire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ tend vers une limite finie non nulle.
De plus, d'après la question 9a, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée. Soit $M_1 \in \mathbb{R}$ un majorant. Alors, par définition et d'après 9c, $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, on a $T_n \leqslant p_n \leqslant M_1$.
On en déduit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée. De plus d'après 9a, elle est croissante. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.

10. (a) On a d'abord $2^0 = 1 \geqslant 0$.
Montrons ensuite par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, l'assertion $Q(k) = [2^k \geqslant k]$ est vraie.

Initialisation: On a $2^1 = 2 \geqslant 1$ donc l'assertion $Q(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $Q(k)$ est vraie. Alors, $2^{k+1} = 2 \times 2^k \geqslant 2 \times k \geqslant k + k \geqslant k + 1$. On a déduit que $Q(k+1)$ est vraie.
On a montré que $\forall k \in \mathbb{N}^*, Q(k) \Rightarrow Q(k+1)$.

Conclusion : D'après le théorème de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $2^k \geqslant k$.
On peut conclure que $\forall\, k \in \mathbb{N}^\star$, on a $2^k \geqslant k$.

J'ai vu aussi une très jolie preuve chez Rémi M. qui considère la suite $z_n = 2^n - n$, montre qu'elle est croissante donc minorée par son premier terme qui est positif et conclut.
Beaucoup d'entre vous supposent $2^k \geqslant k$ et montrent $2^{k+1} \geqslant k$ (au lieu de $2^{k+1} \geqslant k+1$.

(b) D'après les questions 9d et 9e, il suffit d'étudier la nature de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (\sum_{k=1}^n a^{(2^k)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ pour en déduire la nature du produit infini $\prod_{k\geqslant 1} u_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$a^{2^k} = \exp(2^k \ln(a)).$$

Or, $a \in]0, 1[$ donc $\ln(a) < 0$. D'après la question précédente, $2^k \geqslant k$ donc

$$2^k \ln(a) \leqslant k \ln(a),$$

puis, comme la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient

$$\exp(2^k \ln(a)) \leqslant \exp(k \ln(a))$$

c'est-à-dire

$$\exp(2^k \ln(a)) \leqslant a^k.$$

En sommant pour k variant de 1 à n, on obtient

$$T_n \leqslant \sum_{k=1}^n a^k = a\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \leqslant \frac{a}{1 - a}.$$

On en déduit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée. De plus, d'après la question 9)a), cette suite est croissante donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente. Enfin, d'après la question 9)d), on en déduit que le produit infini $\prod_{k\geqslant 1} u_k$ est convergent.