Correction du TD n 9

Correction 1 1. $v_n \sim u_n$

2. $v_n = o(u_n)$

3. $u_n = o(v_n)$ (croissance comparée)

4. $u_n \sim v_n$

Correction 4 1. Non, car $u_{2n} \to 2$ et $u_{2n+1} \to 0$.

2. oui, elle tend vers 0.

3. oui, elle tend vers 0.

4. non, car $u_{4n} = 1$ et $u_{4n+2} = -1$.

5. on écrit $u_n = exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. On a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 2$, on en déduit que $u_n \to e^2$.

Correction 5

- $u_n = n-\sqrt{n^2-n} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-1/n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
- $v_n = \sqrt{n(n+a)} - n = \frac{na}{\sqrt{n^2+na}+n} = \frac{a}{\sqrt{1+a/n}+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{a}{2}$.
- $w_{4p+1} = \frac{4p+1}{2} \to +\infty$ mais $w_{2p} = 0, \forall p$ donc (w_n) ne peut pas converger.
- $|z_n| \leqslant \frac{|\sin n^2|+|\cos n^3|}{n} \leqslant \frac{2}{n}$ donc z_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- On a $\frac{2^n}{n!} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ donc par continuité de cosinus, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.
- $b_n = e^{\frac{1}{n}\ln(3-\sin n)}$. On a $2 \leqslant 3-\sin n \leqslant 4, \forall n$ donc $\ln 2 \leqslant \ln(3-\sin n) \leqslant \ln 4, \forall n$ et par le théorème des gendarmes, $\frac{1}{n}\ln(3-\sin n) \to 0$ donc $b_n \to 1$ par continuité de l'exponentielle.
- $c_n = \frac{n^3}{e^{n\ln 3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$, chaque terme tend vers 0 donc c_n aussi.
- $d_n = \underbrace{\frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}}_{\to 0}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 1$.
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 0$ donc par continuité de sinus, $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ et cosinus étant bornée, on a $e_n \to 0$.

Correction 6 Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\forall k \in [\![1,n]\!], kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$ donc, en sommant les inégalités, $\sum\limits_{k=1}^{n} kx - 1 < \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} kx$ puis $\frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{xn(n+1)}{2n^2}$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $u_n \to \frac{x}{2}$.

Correction 7 1. Par récurrence sur n.

2. On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n - 35}{u_n + \sqrt{2u_n+35}}.$$

Le polynôme $X^2 - 2X - 35$ est de discriminant négatif, il est donc toujours positif. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée, elle est convergente.

Correction 8 On suppose, dans un premier temps que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{u} k + \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}v_n + \frac{u_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1}(v_n - u_{n+1})$$

Or,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n,$$

donc $v_n \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$ par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que $v_{n+1} - v_n$ est positif donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi puis $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

On peut aussi (un peu plus tordu, je vous l'accorde) écrire :

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=k}^{n}(u_j-u_{j+1})\right)+u_{n+1}\right) \\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(u_j-u_{j+1}) + \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} u_{n+1} \\
&= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(u_j-u_{j+1}) - \frac{u_{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(u_{j+1}-u_j)
\end{aligned}$$

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors pour tout j, $(u_{j+1}-u_j)$ est de signe constant et $v_{n+1}-v_n$ est alors également du même signe donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également monotone, de même monotonie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 9 On a :

$$(a^n+b^n)^{1/n} = b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)^{1/n},$$

et

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)^{1/n} = exp\left(\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right) \to 1$$

donc $v_n \to b$.

Correction 10 On a :

$$\lfloor n\sqrt{n}\rfloor > n\sqrt{n}-1,$$

donc :

$$\frac{\lfloor n\sqrt{n}\rfloor}{n} > \frac{n\sqrt{n}-1}{n},$$

et, par croissance de la partie entière,

$$\left\lfloor\frac{\lfloor n\sqrt{n}\rfloor}{n}\right\rfloor > \left\lfloor\frac{n\sqrt{n}-1}{n}\right\rfloor > \frac{n\sqrt{n}-1}{n}-1.$$

On a donc :

$$u_n > \sqrt{n}\left(\frac{n\sqrt{n}-1}{n}-1\right) = \sqrt{n}\left(\frac{n\sqrt{n}-n-1}{n}\right),$$

or, $\sqrt{n}\left(\frac{n\sqrt{n}-n-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc, par minoration, $u_n \to +\infty$.

Correction 11 On calcule $I_{n+1}-I_n$:

$$I_{n+1}-I_n = \int_1^e (\ln x)^{n+1}\,\mathrm{d}x - \int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \int_1^e \left((\ln x)^{n+1}-(\ln x)^n\right)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $x\in[1,e]$, on a $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on a $I_{n+1}-I_n \leqslant 0$ et la suite est décroissante.

Par positivité de l'intégrale, on sait, de plus, qu'elle est minorée par 0. On peut donc affirmer qu'elle converge.

Correction 12 On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. On a alors :

$$v_{n+1}-v_n = u_{2n+2}-u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leqslant 0,$$

et

$$w_{n+1}-w_n = u_{2n+3}-u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = -\frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \geqslant 0.$$

Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc de sens de monotonie opposé. De plus, on a :

$$u_{2n+1}-u_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc les suites sont adjacentes. Par conséquent, elles ont même limite, ce qui implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction 13 On calcule $u_{n+1}-u_n$, on trouve :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{nu_n^2}{n+1} \geqslant 0,$$

donc la suite est croissante. Si elle converge vers une limite finie l, on $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}u_n^2 = l^2$. Par unicité de la limite, on doit avoir

$$l = l + l^2,$$

ce est équivalent à $l = 0$. Or, la suite est positive par une récurrence immédiate, étant donné qu'on a supposé $u_0 > 0$. Elle ne peut donc croire vers 0 ce qui montre que la suite tend vers $+\infty$

Correction 14 On encadre le terme général:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on en déduit, par encadrement, que la suite converge vers 0.

Correction 15 Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{t^n}{(1+t)^2} \leqslant t^n,$$

donc

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} \leqslant \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^n}.$$

Comme $\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^n} = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, on obtient :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1},$$

ce qui permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Correction 16 On encadre :

$$\forall n > 0, \frac{n}{2} - 1 < \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \leqslant \frac{n}{2},$$

donc

$$\forall n > 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{2}.$$

On en déduit que :

$$\forall n > 0, 0 < \frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor < 1,$$

donc $\left\lfloor\frac{1}{n}\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\rfloor = 0$. On a donc :

$$\forall n > 0, v_n = 0,$$

ce qui montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (puisqu'elle est constante) et que sa limite est nulle.

Correction 17 On a $u_{n^2} = \lfloor\lfloor\sqrt{n^2}\rfloor - \sqrt{n^2}\rfloor = 0$ et

$$-1 < \lfloor\sqrt{n^2+1}\rfloor - \sqrt{n^2+1} \leqslant 0.$$

De plus, $\lfloor\sqrt{n^2+1}\rfloor - \sqrt{n^2+1} \neq 0$ car si c'était le cas, alors n^2+1 serait un entier. On aurait alors $n^2+1 = m^2$ d'où $n^2 - m^2 = 1 = (n-m)(n+m)$ ce qui est impossible pour $n > 1$. On a donc :

$$-1 < \lfloor\sqrt{n^2+1}\rfloor - \sqrt{n^2+1} < 0.$$

ce qui implique, par définition de la partie entière, que $u_{n^2+1} = -1$. On a trouvé deux suites extraites de (u_n) possédant des limites différentes donc la suite n'admet pas de limite.

Correction 18 On a $u_n \geqslant \frac{n}{\sqrt{2n}}$ donc $u_n \to +\infty$.

Correction 19 On le montre par récurrence sur $\mathbb{N}$. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. On suppose qu'il est vrai au rang $n+1$. On a :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3,$$

par hypothèse de récurrence. Or :

$$(n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$

La formule est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, on a montré qu'elle est vraie pour tout entier n.

Correction 20 L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ possède 1 et -2 pour racines, on sait donc qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 1^n + \beta(-2)^n = \alpha + \beta(-2)^n.$$

Déterminons α et β à l'aide des premiers termes:

$$u_0 = 0 = \alpha + \beta,$$

et

$$u_1 = 3 = \alpha - 2\beta.$$

On a donc $\alpha = -\beta$ et $\alpha = 1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n = 1 + (-2)^{n+1}.$$

Correction 21 On écrit l'équation caractéristique :

$$r^2 - r + 1 = 0.$$

Ses racines sont $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$. On en déduit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u_n = \alpha \cos \frac{n\pi}{3} + \beta \sin \frac{n\pi}{3}.$$

On a $u_0 = 1 = \alpha$ et $u_1 = 2 = \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \beta \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $\beta = \sqrt{3}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

Correction 22 L'équation caractéristique est

$$2r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Ses racines sont $\frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1 \pm i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}$. On en déduit que les suites vérifiant $2(v_{n+1} - v_{n+2}) = v_n$ sont de la forme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\alpha \cos \frac{n\pi}{4} + \beta \sin \frac{n\pi}{4}\right).$$

Quelque soient les réels α et β, le terme $\alpha \cos \frac{n\pi}{4} + \beta \sin \frac{n\pi}{4}$ est borné et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$ donc une telle suite tend vers 0, quels que soient ses premiers termes.

Correction 23 Posons $v_n = u_n + \gamma$, alors

$$v_{n+2} = u_{n+2} + \gamma = u_{n+1} + 2u_n - 4 + \gamma = (u_{n+1} + \gamma) + 2(u_n - \gamma) + 2\gamma - 4 = v_{n+1} + 2v_n + 2\gamma - 4.$$

Pour avoir l'égalité souhaitée, il faut $\gamma = 2$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente dont on peut déterminer l'expression. Son équation caractéristique est

$$r^2 - r + 2 = 0,$$

dont les racines sont -1 et 2. On en déduit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$. On a $u_0 = 1$ donc $v_0 = 3 = \alpha + \beta$ et $u_1 = 1$ donc $v_1 = 3 = -\alpha + 2\beta$. On en déduit que $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n + 2^{n+1},$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + 2^{n+1} - 2.$$

Correction 24 L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$ dont les racines sont -1 et 2. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n.$$

On a $u0 = 0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = 1 = -\alpha + 2\beta$. On en déduit que $\beta = \frac{1}{3} = -\alpha$ donc

$$\forall n \in dn, u_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right).$$

Correction 25 On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 2 = 2v_n,$$

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 2. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^n(u_0 - 1),$$

on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1 = 2^n(u_0 - 1) + 1.$$

Correction 26 On cherche α tel que $(u_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ soit géométrique. On trouve $\alpha = \frac{1}{2}$, on a donc $\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$ géométrique de raison -3 et de premier terme $u_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)(-3)^n,$$

d'où, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}3^n}{2} + \frac{1}{2}.$$

Correction 27 On a, pour $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = (n+1)nu_n = (n+1).n^2(n-1)u_{n-1}$. On en déduit que $u_{n+1} = (n+1).(n!)^2.u_0$ donc

$$\forall n \geqslant 1, u_n = 2n\left((n-1)!\right)^2.$$

Correction 28 1. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. La fonction est croissante sur $[1, +\infty[$ (calcul de dérivée).

On remarque que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, on va donc procéder par récurrence. On a $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$, le résultat est donc vrai au rang 0. On suppose qu'il existe un entier n tel que $u_n \geqslant \sqrt{2}$. On applique f qui est croissante sur $[1, +\infty[$. On obtient $f(u_n) \geqslant f(\sqrt{2})$ d'où $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$. La propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, on a $f(u_n) \geqslant \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} \\ &= \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \\ &\leqslant \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2} \text{ car } u_n \geqslant \sqrt{2} \geqslant 1 \end{aligned}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

3. L'inégalité à montrer est vraie pour $n = 0$ car $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| \leqslant 1$. La propriété est donc initialisée. On suppose qu'il existe un entier n tel que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^{2^n - 1}}$

On a

$$\begin{aligned} \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| &\leqslant \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2} \text{ d'après la question précédente} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2^n - 1}}\right)^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{2\left(2^{2^{n+1} - 2}\right)} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{2^{n+1} - 1}} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \sqrt{2}) = 0$, d'après l'inégalité que l'on vient de montrer.

Correction 29 Les points fixes, et donc les limites possibles sont les réels l tels que

$$\frac{l^2}{(1+l)^4} = l \Leftrightarrow l^2 = (l+1)^4 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } (1+l)^4 = 1.$$

On a donc $l = 0$ ou $l = -2$.

On remarque que la suite est à termes positifs à partir du rang 1. L'unique limite possible est donc 0.
De plus, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{(1+u_n)^4}.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $1 + u_n > 1$ donc

$$(1+u_n)^4 > 1 + u_n > u_n.$$

On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme la suite est minorée, elle est convergente et nous avons montré que l'unique limite possible est 0.

Correction 30 On a $u_0 \geqslant 1$, il est alors clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. On pose $f(x) = 1 + \ln(x)$, on va étudier f sur $[1, +\infty[$. La fonction est croissante, d'image $[1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc monotone et minorée. On pose $g(x) = f(x) - x$. On a

$$g'(x) = \frac{1-x}{x},$$

donc $g'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 1$. Comme $g(1) = 0$, on en déduit que g est négative. Par suite, quelque soit $u_0 \in \mathbb{R}$, on a $u_1 - u_0 \leqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée, on sait qu'elle converge. Sa limite est l'unique point fixe de f : 1.

Correction 31 On pose $f(x) = \sqrt{2-x}$. La fonction f est strictement décroissante et admet un unique point fixe pour $x = 1$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	1	2
$f(x)$	$\sqrt{2}$ $\searrow$	1 $\searrow$	0

L'intervalle $[0, 2]$ est stable par f, la suite est donc bien définie.

On sait que la suite (u_{2n}) est monotone et comme $u_0 = 0$, on a $u_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} > 0$ donc $u_2 - u_0 > 0$. On peut donc affirmer que la suite (u_{2n}) est croissante. On remarque, de plus , que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par $f \circ f$ et $u_0 \in [0, 1]$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in [0, 1],$$

donc la suite (u_{2n}) est majorée par 1. Cette suite étant croissante et majorée, on peut affirmer qu'elle converge. Déterminons sa limite. On cherche, pour cela, les points fixes de $f \circ f$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} f\circ f(x) = x \quad & \Leftrightarrow \sqrt{2-\sqrt{2-x}} = x \\ & \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2-\sqrt{x}} = x^2 \text{ car } x \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow 2 - x^2 = \sqrt{2-x} \\ & \Leftrightarrow (2-x^2)^2 = 2 - x \\ & \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2-3x-2) = 0. \end{aligned}$$

On pose $h(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$. La fonction h ainsi définie est dérivable de dérivée $h'(x) = 3x^2 + 2x - 3$. Elle s'annule en $\dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$. Comme $\dfrac{-1-\sqrt{10}}{3} < 0$ et $\dfrac{-1+\sqrt{10}}{3} \in [0,1]$, h' s'annule une seule fois sur $[0,1]$. Notons $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{10}}{3}$. On a le tableau de variations suivant :

x	0		α		1
$h(x)$	-2	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	-3

D'après le tableau de variations, h est strictement négatif sur $[0,1]$. On en déduit que l'unique point fixe de $f \circ f$ est 1. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger que vers 1.

De plus, on a $f(u_{2n}) = u_{2n+1}$ donc, par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1$. Comme les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Correction 32 On a $u_0 > 0$, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On pose $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, on étudie cette fonction sur $\mathbb{R}_+^*$. On commence par déterminer si f possède des points fixes. On a $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$. Il y a deux solutions :

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

mais seule $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ est positive. On note $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Elle est décroissante, on a le tableau de variations suivant :

x	0		α		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	0

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$ donc la suite est bornée. De plus, $f \circ f$ est croissante donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. On peut donc affirmer qu'elle est convergente quelque soit la valeur de u_0.

Déterminons ses limites possibles. On a

$$\begin{aligned} & f\circ f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1+x}{2+x} = x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + x - 1 = 0. \end{aligned}$$

L'unique limite (positive) possible est α. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \alpha$ puis, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = f(\alpha) = \alpha$ par continuité de f. Enfin, les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Correction 33 On pose $f(x) = \ln x + x$. La fonction f est strictement croissante et son image est $\mathbb{R}$, elle est donc bijective ce qui nous assure que la suite est bien définie.

De plus, on a :

$$f(x_n) = n < n + 1 = f(x_{n+1})$$

donc, par croissance de f,

$$x_n < x_{n+1}$$

ce qui montre que la suite est croissante. On sait donc qu'elle admet une limite. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle l alors, par continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l),$$

or :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite réelle, elle tend vers $+\infty$.

Correction 34 1. On pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$. La fonction f_n ainsi définie est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective. Comme, de plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = n$, on sait que 1 est un élément de $f([0,1])$ donc il admet un unique antécédent dans $[0,1]$.

2. Pour étudier la monotonie de la suite, on remarque que, pour tout x, on a $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. On a donc
$$f_n(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_n).$$
Or $f_n(x_n) = 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$, donc
$$f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(x_n),$$
ce qui permet de conclure que $x_{n+1} \leqslant x_n$, par croissance de la fonction f_n. La suite ainsi définie est donc décroissante.

3. On calcule :$f_n(1/2) = \frac{1}{2}\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$. On a donc $f_n(1/2) < f_n(x_n)$ donc, par croissance de f_n, $x_n \geqslant \frac{1}{2}$.

4. On sait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, elle est donc convergente. Notons l sa limite réelle. On a $f_n(x) = x\frac{1-x^n}{1-x}$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \frac{l}{1-l}$ car $l \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Comme, de plus, $f_n(x_n) = 1$, on a, par unicité de la limite, $\frac{l}{1-l} = 1$ d'où $l = \frac{1}{2}$.

Correction 35 1. On note $f : x \mapsto e^x + x$. Alors f est strictement croissante, son image vaut $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\frac{1}{n+1}$ admet un unique antécédent que l'on note x_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ donc $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. Comme f est croissante, on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Si elle ne converge pas, elle tend vers $-\infty$. On aurait alors $f(x_n) \to -\infty$ par continuité de f. Or $f(x_n) \to 0$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Correction 36 1. La fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. Comme f est croissante, on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.

Enfin, on remarque que $f(0) = 0 < \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Donc, toujours pas croissance de f, $x_n > 0$ pour tout n. La suite est donc décroissante et minorée, on peut affirmer qu'elle converge. On note l sa limite. Par continuité de f, on a $f(x_n) \to l^3 + l$. Or $f(x_n) = \frac{1}{n} \to 0$. Par unicité de la limite, on a $l + l^3 = 0$. On en déduit que $l = 0$ et la suite converge vers 0.

Correction 37 1. La fonction $x \mapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur I_n, de dérivée $x \mapsto \tan^2 x$ donc f est croissante. On a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+n\pi} = -\infty$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{\pi}{2} + n\pi$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2} + n\pi$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

La fonction f est bijective de I_n dans $\mathbb{R}$, elle s'annule donc une unique fois sur I_n. On en déduit que l'équation (E) admet une unique solution dans I_n.

2. On a $x_n \geqslant n\pi - \frac{\pi}{2}$ donc, par le thm de minoration, $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3. On aimerait poser $v_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ et appliquer la définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à savoir $\tan(x_n) = x_n$ mais
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \in]0, \pi[,$$
sur lequel tan n'est pas définie.

On reprend le tableau de variations de f et on fait apparaître $f(n\pi) = -n\pi$:

x	$-\frac{\pi}{2}+n\pi$	$n\pi$	$\frac{\pi}{2}+n\pi$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$-n\pi$	$+\infty$

et comme $f(x_n)=0$ et f strictement croissante, on en déduit que $x_n \geqslant n\pi$:

x	$-\frac{\pi}{2}+n\pi$	$n\pi$	x_n	$\frac{\pi}{2}+n\pi$
$f'(x)$			$+$	
f	$-\infty$	$-n\pi$	0	$+\infty$

On pose $v_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Comme $x_n \in \left]n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, on a $v_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.
On a $\tan(v_n) = \tan(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}) = \tan(x_n - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\tan(x_n)} = -\frac{1}{x_n}$.

On a donc $v_n = \arctan\left(-\frac{1}{x_n}\right)$ car $v_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par continuité de arctan, on en déduit que $v_n \to 0$.

Correction 38 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^3 + nx$. Cette fonction est continue et impaire. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ donc $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}$. On en déduit que 1 admet un antécédent par f_n. De plus, elle est strictement croissante donc injective, 1 admet donc un unique antécédent par f_n, on le note u_n.

2. On a $f_n(1) = 1+n$ et $f_n(0) = 0$ donc pour $n \geqslant 1$, $f_n(1) > f_n(u_n) > 0$. Par croissance de (u_n), on a $0 < u_n < 1$. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = x^3 + nx + x = f_n(x) + x$ donc pour tout $x > 0$, on a

$$f_{n+1}(x) > f_n(x).$$

On a donc

$$f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n), \text{ or } f_n(u_n) = 1 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

on a donc

$$f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et, par croissance de f, on en déduit $u_{n+1} < u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente.

Notons l sa limite. Si $l \neq 0$, alors $u_n^3 + nu_n \to +\infty$. Or $f_n(u_n) = 1$, on a donc une contradiction. On en déduit que la limite est nulle.

Correction 39 On note l_1, l_2 et l_3 les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(u_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois une suite extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, on a donc $l_1 = l_3$. De même, la suite $(u_{10n+5})_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois une suite extraite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, on a donc $l_2 = l_3$. On en déduit que $l_1 = l_2$ donc les suites extraites des indices pairs et impairs convergent vers la même limite. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction 40 On commence par s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n > 0$, ce qui est clair par une récurrence immédiate. Les deux suites sont donc bien définies.

On remarque ensuite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)^2}{2}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} \geqslant a_{n+1}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n \geqslant a_n,$$

et ce résultat est également vrai au rang 0 par hypothèse.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, alors

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant b_n,$$

puisque $a_n \leqslant b_n$. Ainsi, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De même, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2}$ donc $(a_n > 0)$, $a_{n+1} \geqslant a_n$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On se retrouve alors avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0.$$

On en déduit que les deux suites sont bornées donc convergentes par le théorème de limite monotone. Enfin, si on note l et l' les limites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $b_{n+1} \to l'$ et $b_{n+1} \to \frac{l+l'}{2}$ donc, par unicité de la limite, $l = l'$ et les deux suites tendent vers la même limite.

Correction 41 1. On sait qu'il existe N tel que $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant \frac{a}{2}$. On a donc, pour $n \geqslant N$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} u_k + (n-N+1)\frac{a}{2}$. Par le thm de minoration, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

2. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} - v_n = a$ avec $a > 0$. Alors, d'après la question précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = +\infty,$$

or $\sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Correction 42 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Par définition de la limite, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in \left]l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right[$. Or il y a au plus un unique dans l'intervalle ouvert $\left]l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right[$, la suite est donc stationnaire à partir du rang N, égale à cet entier.

Correction 43 1. On a $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Pour tout k dans $[|n+1, 2n|]$, on a $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$ donc, en sommant les inégalités :

$$H_{2n} - H_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. On sait que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle admet donc une limite. Si cette limite est réelle, notons-la l, alors $H_{2n} - H_n \to l - l = 0$, ce qui est impossible car cette différence est minorée par 2. On en déduit que la suite tend vers $+\infty$.

3. On a $H_{2n} - \ln(2n) \to \gamma$ donc $H_{2n} - \ln(2n) - H_n + \ln(n) \to 0$. On en déduit que $H_{2n} - H_n \to \ln(2)$.

Correction 44 1. On sait que pour tout $k > 1$, on a $k^2 \geqslant k^2 - k$ donc $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2 - k}$, ce qu'on peut aussi écrire :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Pour $r \geqslant 2$, on a $k^r \geqslant k^2$ donc $\frac{1}{k^r} \leqslant \frac{1}{k^2}$. On en déduit que pour tout $k > 1$ et tout $r \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{k^r} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

On en déduit, on sommant les inégalités entre 2 et n, que :

$$S_n(r) \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n-1} \leqslant 2.$$

La suite est donc majorée. Comme, on a :

$$S_{n+1}(r) - S_n(r) = \frac{1}{(n+1)^r} \geqslant 0,$$

la suite est croissante, on en déduit qu'elle converge.

2. Pour tout k entre 1 et n, on a $\frac{1}{k^{r+1}} \leqslant \frac{1}{k^r}$. En sommant entre 1 et n, on obtient

$$S_n(r+1) \leqslant S_n(r),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit, en passant à la limite, que $\sigma_{r+1} \leqslant \sigma_r$ donc la suite $(\sigma_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. (a) Pour tout $x \in [k-1, k]$, on a $\frac{1}{k^r} \leqslant \frac{1}{x^r}$. On intègre entre $k-1$ et k, on obtient :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^r} dx \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^r},$$

ce qui implique $\frac{1}{k^r} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^r}$. On somme ces inégalités entre 2 et n, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^r},$$

ce qui se réécrit, grâce à la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^r}.$$

On a ajoute 1 de chaque côté :

$$S_n(r) \leqslant 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^r}.$$

Comme il est clair que $S_n(r) \geqslant 1$, on a l'encadrement souhaité.

(b) On a $\int_1^n \frac{dx}{x^r} = \left[\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^n = \frac{1}{(1-r)n^{r-1}} - \frac{1}{1-r}$. On a donc :

$$1 \leqslant S_n(r) \leqslant \frac{1}{(1-r)n^{r-1}} - \frac{1}{1-r} + 1.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$. On obtient :

$$1 \leqslant \sigma_r \leqslant 1 + \frac{1}{r-1}.$$

Enfin, on fait tendre r vers $+\infty$. Par le thm d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{r\to+\infty} \sigma_r = 1$.