Lycée du Parc 842.

Complément sur les systèmes linéaires

Définition 1. Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble solution.
Un système est dit compatible si l'ensemble des solutions est non vide.

On a dit qu'un système est échelonné ou triangulaire s'il est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & & & = b_1 \\ & a_{2j_2}x_{j_2} + \dots & & & = b_2 \\ & & \ddots & & = \vdots \\ & & & a_{rj_r}x_{j_r} \dots & = b_r \\ & & & 0 & = b_{r+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & = b_n \end{cases}$$

avec $1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Exemples 1.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = b_1 \\ -x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = b_2 \\ 2x_4 + 2x_5 & = b_3 \\ 4x_4 & = b_4 \end{cases}$ *est échelonné*

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = b_1 \\ -x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = b_2 \\ 2x_4 + 2x_5 & = b_3 \\ 4x_4 & = b_4 \\ & = b_5 \end{cases}$ *est aussi échelonné*

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_4 + 4x_5 & = b_1 \\ x_3 - x_4 & = b_2 \\ 8x_5 & = b_3 \\ 0 & = b_4 \end{cases}$ *est échelonné.*

4. $\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_5 & = b_1 \\ x_2 + x_3 & = b_2 \\ -x_2 & = b_3 \\ x_3 + x_5 & = b_4 \end{cases}$ *n'est pas échelonné.*

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 & = b_1 \\ 4x_4 & = b_2 \\ 0 & = b_3 \\ 0 & = b_4 \end{cases}$ *est échelonné.*

Rigoureusement:

- Les coefficients $a_{11}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$ sont non nuls, ils sont appelés pivots.
- Les lignes dont le membre de gauche est nul sont en dernière position.
- Sur les lignes dont le membre de gauche n'est pas nul (c'est-à-dire celles qui ont des inconnues), les indices $j_1, \ldots, j_r$ des premiers coefficients non nuls sont strictement croissants.

Vocabulaire:

- On a dit que les premiers coefficients à gauche (non nuls) sont appelés pivots.
- Le nombre r de lignes dont le membre de gauche est non nul (cad celle qui ont des inconnues) est appelé rang du système.
- les x_k avec $k \neq j_i$ sont appelés variables libres: elles pourront prendre n'importe quelle valeur.
- Les dernières lignes, celles dont le membre de gauche est nul, sont appelées condition de compatibilité: elles donnent des conditions pour que le système admette des solutions (= soit compatible).

Proposition 1.
Un système à p inconnues et n équations, de rang r vérifie :

$$r \leqslant \min(n, p).$$

En effet, on a nécessairement $r \leqslant n$ (nombre de lignes non nulles est inférieur ou égal au nombre de lignes total) et $r \leqslant p$ car on perd au minimum une inconnue à chaque ligne donc on ne peut avoir $r > p$).

Système homogène:

On considère un système homogène (donc les membres de droites sont nuls) à p inconnues et n équations, de rang r

Proposition 2.

- Le système est toujours compatible, il admet toujours la solution nulle.
- Si $r = p$, le système admet une unique solution: la solution nulle.
- Si $r < p$, l'ensemble des solutions est paramétrée par $p - r$ variables libres.

Remarque. *Le nombre d'équations importe peu: s'il y en a un trop grand nombre, il y aura des répétitions dans les équations et on les enlèvera.*

Exemples 2.

1. *On cherche à résoudre le système*

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 4y - 2z &= 0 \end{cases}$$

On remarque que la deuxième ligne vaut deux fois la première ligne. On a donc

$$\left\{\ x+2y-z \ = 0\right.$$

En faisait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.

Le système est échelonné, il est de rang 1. On peut, par exemple, choisir z et y comme variables libres et l'ensemble des solutions est

$$\left\{(-2y+z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On peut également choisir x et y comme variables libres, l'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\left\{(x, y, x+2y-), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. *On cherche à résoudre*

$$\begin{cases} x+y-z & =0 \\ x-2y+z & =0 \\ x+4y-3z & =0 \end{cases}$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient

$$\begin{cases} x+y-z & =0 \\ -3y+2z=0 \\ 3y-2z & =0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x & = \frac{1}{3}z \\ y & = \frac{2}{3}z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc (avec z comme variable libre):

$$\left\{\left(\frac{1}{3}z, \frac{2}{3}z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il est plus simple d'écrire simplement :

$$\{(z, 2z, 3z), z \in \mathbb{R}\}$$

Système quelconque:

On considère un système avec n équations, p inconnues et de rang r.

Théorème 3.

- Le système admet des solutions si (et seulement si) les conditions de compatibilité sont vérifiées.
- Si $r = n$, il n'y a pas de conditions de compatibilité, le système a donc toujours des solutions.
- Si $r < p$, il y a $p - r$ variables libres.
- Si $r = p$, il n'y a aucune variable libre. S'il y a une solution (= si les conditions de compatibilité sont vérifiées), elle est unique.
- Si $r = n = p$: il y a toujours une unique solution.

Exemples 3.

1. *On cherche à résoudre le système*

$$\begin{cases} x+2y-z &= a \\ 2x+4y-2z &= b \end{cases}$$

On remarque que le membre de gauche de la deuxième ligne vaut deux fois celui de la première ligne. On a donc

$$\begin{cases} x+2y-z &= a \\ 0 &= b-2a \end{cases}$$

En faisait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.

Le système est échelonné, il est de rang 1. Il y a une condition de compatibilité: $b = 2a$. Si elle n'est pas vérifiée, le système n'a pas de solution. Si elle est vérifiée, le système a des solutions. On peut, par exemple, choisir z et y comme variables libres et l'ensemble des solutions est

$$\left\{(a-2y+z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On peut également choisir x et y comme variables libres, l'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\left\{(x, y, x+2y-a), (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Évidemment, les deux ensembles sont égaux, ils sont juste paramétrés différemment. On peut aussi choisir x et z comme variables libres mais on aura alors des fractions ($\frac{1}{2}$).

2. *On considère le système :*

$$\begin{cases} x+2y+z &= a \\ 2x-y+2z &= b \\ x-3y+z &= c \end{cases}$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x+2y+z &= a \\ -5y &= b-2a \\ -5y &= c-a \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x+2y+z &= a \\ -5y &= b-2a \\ 0 &= b-a-c \end{cases}$$

Si $b = a + c$, il y a des solutions:

$$S = \left\{\left(a - z + \frac{2(b-2a)}{5}, -\frac{b-2a}{5}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$$

Il y a une variable libre (ici, on a choisi z).

3. *On cherche à résoudre*

$$\begin{cases} x+2y+z &= a \\ 2x-y+2z &= b \\ x+2y+2z &= c \end{cases}$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$*:*

$$\begin{cases} x+2y+z &= a \\ -5y &= b-2a \\ z &= c-a \end{cases}$$

Il y a une unique solution que l'on peut expliciter:

$$\left(\frac{6}{5}a + \frac{2}{5}b - c, -\frac{b-2a}{5}, c-a\right)$$

4. *On cherche à résoudre*

$$\begin{cases} x+2y+z &= a \\ 2x-y+2z &= b \\ x+2y+2z &= c \\ x-3y &= d \end{cases}$$

On fait les mêmes opérations et $L_4 \leftarrow L_4 - L_3 - L_2$*, on obtient*

$$\begin{cases} x+2y+z &= a \\ -5y &= b-2a \\ z &= c-a \\ 0 &= d-c-b \end{cases}$$

Il y a une condition de compatibilité : $d = c+b$*. Si elle est vérifiée, il y a une unique solution.*