Correction du TD n 10

Correction 1 L'ensemble des solutions du premier système est $\{(3-z, 2-2z, z), z \in \mathbb{R}\}$.
Le deuxième système a une unique solution $\left(\left(\frac{c+4a+3b}{10}\right), \left(\frac{-2a+b+7c}{20}\right), \left(\frac{-a-2b+c}{5}\right)\right)$.
Le troisième système a une unique solution $(1, -1, 2)$.

Correction 2

- La condition de compatibilité est $9b_2 - 5b_1 + 2b_4 - 6b_3 = 0$. Si elle est vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\{\left(-\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2} + \frac{3b_4}{2} - y, y, -\frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, \frac{b_1 - b_2}{2}\right), y \in \mathbb{R}\}$$

- La condition de compatibilité est $a + 3b - c = 0$. Si elle est vérifiée, les solutions sont

$$\{\left(\frac{a}{3} + \frac{2b}{3} - \frac{1}{3}z, \frac{a}{3} - \frac{b}{3} + \frac{2}{3}z - t, z, t\right), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Correction 3

- Si $a = 1$ le rang vaut 1 car toutes les lignes du système sont identiques. Si $a \neq 1$, le rang vaut 2 car $L_1 = L_3$ (et L_1 et L_2 non colinéaires.
- Si $a = 1$ le rang vaut 1 car toutes les lignes du système sont identiques.
Si $a = -2$, on a $L_1 + L_2 + L_3 = 0$, et L_1 et L_2 non colinéaires donc le rang vaut 2.
Si $a \notin \{-2, 1\}$, on triangularise le système et on constate que le rang vaut 3.
- On fait $L_3 \leftrightarrow L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_2$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & \text{z} \\ 0 & 1-a & a-a^2 & \text{y-z} \\ 0 & a-a^2 & 1-a^3 & x-a^2y \end{array}\right)$$

On fait ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & \text{z} \\ 0 & 1-a & a-a^2 & \text{y-z} \\ 0 & 0 & 1-a^2 & x-a^2y-ay+az \end{array}\right)$$

On en déduit que si $a = -1$ le rang vaut 2, si $a = 1$, le rang vaut 1, sinon le rang vaut 3.

- On triangularise le système en faisant $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ et $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$. On constate que le rang vaut 4.

Correction 4 (S_1) : On a une solution unique pour tout b_1, b_2, b_3, b_4, c'est

$$\left(\frac{b_1}{4}, \frac{b_2}{4} - \frac{b_3}{2}, \frac{3b_4}{2}, \frac{5b_1}{4} - \frac{9b_2}{4} + \frac{3b_3}{2} - \frac{b_4}{2}, -\frac{3b_1}{2} + \frac{5b_2}{2} - b_3, \frac{b_1}{2} - \frac{b_2}{2}\right)$$

(S_2) : On a des solutions si $b_2 = b_1 + b_3$. L'ensemble des solutions est

$$\{(-2b_1 + 3b_4 - 11z, b_3 - 2z, b_1 - b_4 - b_3, z), z \in \mathbb{R}\}$$

(S_3) : On a des solutions si $b_1 + b_2 - 2b_4 = 0$ et $2b_1 - b_3 - 2b_4 = 0$.L'ensemble des solutions est

$$\{(b_1 - 2b_4 + 3y + t, y, b_4 - 2y, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

(S_4) : On a des solutions si $b_2 = -2b_1$ et $b_3 = -b_1$ et $b_4 = 3b_1$. L'ensemble est alors

$$\{(b_1 - 2y - z - 2t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$$

Correction 5 Le rang du premier est équivalent à celui obtenu en faisant $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour $i = 2..n$ qui ressemble à ça:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ qui est aussi équivalent à } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (L_i \leftarrow L_2, i = 3..n)$$

Le rang est donc 2.

Pour le deuxième système, on obtient un système équivalent en faisant $l_n \leftrightarrow L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & a & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait ensuite $L_i \leftarrow L_i - L_1, \forall i = 2..n-1$ et $L_n \leftarrow L_n - aL_1$ ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \dots & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & & 0 & 1-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & \dots & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Enfin, on fait $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=2}^{n-1} L_i$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \dots & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & & 0 & 1-a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m \end{pmatrix}$$

avec $m = (1-a)(n-1+a)$. On a donc trois cas possibles:

- $a \neq 1$ et $a \neq 1-n$ et le système est de rang n.
- $a = 1-n$ et le système est de rang $n-1$.
- $a = 1$ et le système est de rang 1.

Correction 6 L'unique solution de T_1 est $(-3, -2, -1/2)$, les solutions de T_2 sont $\{(1, 2-2t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Correction 7 1. Il a comme unique solution $(1, 2, 3)$.

2. Il n'y a aucune solution.
3. Les solutions sont $\left\{(3+2y-z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   Ici, y et z sont variables libres.
4. On remarque que $L_1 + l_2 = L_4$ et $L_3 - L_1 = -L_2$ donc le système est équivalent aux deux premières lignes, les solutions sont

$$\left\{\left(1+\frac{z}{2}-\frac{t}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{z}{2}+\frac{t}{2}, z, t\right), (z,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

   Ici, z et t sont variables libres.
5. On remarque que $L_1 + L_2 = 2L_3$, les solutions sont $\{(3-z, 2-2z, z), z \in \mathbb{R}\}$, ici z est variable libre.

Correction 8 On montre facilement que $x_1 = \lambda^n x_1$ donc

- Soit $\lambda^n \neq 1$ donc $x_1 = 0$ et dans ce cas $x_i = 0, \forall i$ donc la seule solution est la solution nulle.
- Soit $\lambda^n = 1$ et dans ce cas les solutions sont les n-uplets de la forme $x_(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

Correction 9 On fait $L_1 \leftarrow L_1 \sum_{i=2}^{n} (-\lambda)^{i-1} L_i$, on obtient:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \Delta \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1}+\lambda \end{pmatrix}$$

avec $\Delta = -a_0 + a_1\lambda - a_2\lambda^2 + \dots + (-1)^{n-2}\lambda^{n-1}a_{n-1} + (-1)^{n-1}\lambda^n = -\left((-\lambda)^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-\lambda)^n a_n\right)$ On permute ensuite L_n et L_1 et on obtient un système triangulaire dont les coefficients diagonaux valent 1 sauf le dernier qui vaut $-\left((-\lambda)^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-\lambda)^n a_n\right)$. On a donc des solutions non-nulles si $-\lambda$ est racine du polynôme $\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$. Si c'est le cas, la dernière variable est libre et elle paramètre les solutions.

Correction 10 On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a aussi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc, sans aucun calcul,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est la deuxième méthode la plus judicieuse.

Correction 11 On a $S = 5AB - 3BA - 5B^2$ et $T = A^2 - B^2 - 3AB - BA + 2BA^2 - 2A^2B$

Correction 12 On suppose $AB = BA$, on a alors $A^{-1}AB = A^{-1}BA$ puis $B = A^{-1}BA$ car $A^{-1}A = I$. Enfin, on obtient $BA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$ donc $BA^{-1} = A^{-1}B$ et A^{-1} commute avec B.

Correction 13 On pose $B^2 = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a $b_{ij} = i$, d'après la formule du produit matriciel, on a donc, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} ik = \frac{n(n+1)}{2}i$.

On en déduit que $B^2 = \frac{n(n+1)}{2}B$.

Correction 14 On pose $A^2 = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a $a_{ij} = \frac{i}{j}$, d'après la formule du produit matriciel, on a donc, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k}\frac{k}{j} = n\frac{i}{j}$.

On en déduit que $A^2 = nA$.

Correction 15

Correction 16

1. On écrit $A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}$. On a

$$AE_{kl} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij}E_{kl} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{il}$$

car tous les termes pour $j \neq k$ sont nuls et $E_{ij}E_{jl} = E_{il}$.

De même, on a

$$E_{kl}A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{kl}E_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}E_{kj}$$

car tous les termes pour $i \neq l$ sont nuls et $E_{kl}E_{lj} = E_{kj}$.

On a donc

$$AE_{kl} = \begin{pmatrix} & a_{1k} & \\ & a_{2k} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & a_{nk} & \end{pmatrix} \text{ et } E_{kl}A = \begin{pmatrix} & & (0) & \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ & & (0) & \end{pmatrix}$$

où seule la $l$ème colonne est non nulle pour AE_{kl} et seule la $k$ième ligne est non nulle pour $E_{kl}A$. Les deux matrices sont égales si leurs coefficients sont identiques c'est-à-dire :

- $a_{kk} = a_{ll}$ (le coefficient d'indice (k,l) des deux matrices)
- $a_{ik} = 0$ pour $i \neq l$ (les coefficients extra diagonaux de AE_{kl})
- $a_{lj} = 0$ pour $j \neq k$ (les coefficients extra diagonaux de $E_{kl}A$)

2. On suppose $A \in Z$. Alors A commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$. En particulier, elle commute avec toutes les matrices élémentaires. On a donc $AE_{kl} = E_{kl}A$ pour tout couple $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après la question précédente, on en déduit que

   - $a_{ik} = 0$ pour tout $i \neq l$, pour tout k, autrement dit, les coefficients extra diagonaux de la $k$ième colonne sont nuls. Ceci étant vrai pour tout k, la matrice est diagonale
   - $a_{kk} = a_{ll}$ pour tout (k,l) donc tous les coefficients diagonaux ont la même valeur.

   On en déduit que A est de la forme λI_n donc $Z = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$, soit l'ensemble des matrices scalaires.

Correction 17 Notons $A = (a_{ij})$, ${}^tA = (b_{ij})$ et ${}^tAA = (c_{ij})$. On sait que, pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$,

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}.$$

Or, $b_ik = a_{ki}$, par définition de la transposée. On a donc :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2,$$

d'où :

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2.$$

On a supposé $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$. Comme c'est une somme nulle de réels positifs, cela implique qu'ils sont tous nuls. On a donc :

$$\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ki} = 0,$$

ce qui montre que la matrice est nulle.

Correction 18 1. On applique la formule du produit matriciel. On commence par calculer le coefficient $(AE_{ij})_{rs}$ d'indice (r,s) de la matrice AE_{ij}. Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{rk} \left(E_{ij}\right)_{ks}.$$

Or, le coefficient d'indice (k,s) de E_{ij} est nul sauf si $i=k$ et $s=j$. On en déduit que :

$$(AE_{ij})_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq j \\ a_{ri} & \text{si } s = j. \end{cases}$$

On calcule maintenant le coefficient $(AE_{ij}B)_{rl}$ d'indice (r,l) de la matrice $AE_{ij}B$. Par définition, il est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(AE_{ij}\right)_{rk} b_{kl}.$$

Seul le terme d'indice $k=j$ est non-nul, on a donc :

$$(AE_{ij}B)_{rl} = a_{ri}b_{jl}.$$

2. Supposons par l'absurde que B et A sont non-nulles. Alors, il existe deux coefficients $a_{i_0j_0}$ et $b_{i_1j_1}$ non-nuls. On considère alors le produit matriciel $AE_{j_0i_1}B$. Par hypothèse, ce produit matriciel est nul. Or, d'après le calcul précédent, le coefficient d'indice (i_0,j_1) de la matrice $AE_{j_0i_1}B$ est égal à $a_{i_0j_0}b_{i_1j_1}$, il est donc nul ce qui est une contradiction. On a montré, par l'absurde, que A ou B est la matrice nulle.

Correction 19 Comme on a $(AX)^2 = (0)$ pour tout X, c'est vrai en particulier pour une matrice élémentaire. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors $(E_{ij}A)^2 = (0)$. Explicitons la matrice $E_{ij}A$ puis son carré.

On écrit $A = \sum\limits_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}E_{kl}$. Alors

$$E_{ij}A = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{kl}E_{ij}E_{kl}.$$

Or pour $k \neq j$, $E_{ij}E_{kl} = (0)$, on en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kl}E_{ij}E_{kl} = a_{jl}E_{il}$. Ainsi,

$$E_{ij}A = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il}.$$

Déterminons maintenant le carré de cette matrice :

$$(E_{ij}A)^2 = (E_{ij}A)(E_{ij}A) = (E_{ij}A)\sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{ij}AE_{il} \quad (1).$$

Pour un l quelconque, on a, d'après le travail effectué ci-dessus:

$$E_{ij}AE_{il} = \left(\sum_{r=1}^{n} a_{jr}E_{ir}\right) E_{il} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr}E_{ir}E_{il}.$$

Or $E_{ir}E_{il} = (0)$ si $r \neq r$, on a donc

$$E_{ij}AE_{il} = a_{ji}E_{il}.$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$(E_{ij}A)^2 = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}a_{ji}E_{il}.$$

Cette matrice est nulle, par hypothèse. Tous ses coefficients doivent donc être nuls. On a donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!] a_{jl}a_{ji} = 0.$$

En particulier, on a $a_{ji}^2 = 0$ donc $a_{ji} = 0$. Ceci étant valable pour tout (i,j), on en déduit que A est la matrice nulle.

Correction 20 On utilise la formule du produit matriciel. Le coefficient $(AB)_{ij}$ d'indice (i,j) du produit AB est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj},$$

car A est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On calcule maintenant le coefficient d'indice (i,j) du produit matriciel ABA:

$$\sum_{l=1}^{n} \left(AB\right)_{il} a_{lj} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{kl}.$$

On a montré que tous les coefficients du produit matriciel ABA sont identiques, égaux à la somme de tous les coefficients de B. Si on note s la somme de tous les coefficients de B, on a donc :

$$ABA = sA$$

puis

$$\mathrm{Tr}(ABA) = s\mathrm{Tr}(A) = ns.$$

Correction 21 On considère le système associé :

$$\begin{cases} x+2y+t & = a \\ y-z+t & = b \\ x+2y+t & = c \\ x+3y-z+2t & = d \end{cases}$$

On fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_1$, on obtient

$$\begin{cases} x+2y+t & = a \\ y-z+t & = b \\ 0 & = c-a \\ 0 & = d-a-b \end{cases}$$

On en déduit que le rang de la matrice est 2.

Correction 22 non car la somme des deux premières lignes est égale à la troisième ligne, le système associé aura donc une condition de compatibilité en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2 - L_1$.

Correction 23 A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & 10 & -8 \\ 10 & -8 & 1 \\ -8 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

C n'est pas inversible car elle n'est pas carrée. On l'échelonne pour déterminer son rang, on trouve qu'elle est de rang 3.

D est inversible et $D^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & -9 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction 24 Le système associé est :

$$\begin{cases} x_2 & = & b_1 \\ x_3 & = & b_2 \\ \ddots & & \\ x_1 & = & b_n \end{cases}$$

Il est clair qu'il possède une unique solution $(b_n, b_1, \dots, b_{n-1})$ donc la matrice associée est inversible.

Correction 25 Le système associé à la matrice est :

$$\begin{cases} x+z & = & b_1 \\ x+y & = & b_2 \\ x-y+z & = & b_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z & = & b_1 \\ x+y & = & b_2 \\ y & = & b_1-b_3 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = & b_1-b_3 \\ x & = & -b_1+b_2+b_3 \\ z & = & 2b_1-b_2-b_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -b_1+b_2+b_3 \\ y & = & b_1-b_3 \\ z & = & 2b_1-b_2-b_3. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction 26 Le système associé est :

$$\begin{cases} x_2 & = & b_1 \\ x_3 & = & b_2 \\ \ddots & & \\ x_1 & = & b_n, \end{cases}$$

et son unique solution est :

$$(x_1, \dots, x_n) = (b_n, b_1, \dots, b_{n-1})$$

On en déduit que l'inverse de la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction 27 On écrit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

On a désormais une matrice triangulaire supérieure. On va maintenant " éliminer " les coefficients au-dessus de la diagonale. Pour cela, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

puis $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 + L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

La matrice diagonale obtenue est égale à l'identité, on n'a donc pas besoin de diviser chaque ligne par la valeur du coefficient diagonal. On retrouve que l'inverse de la matrice donnée est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction 28 On écrit

$$A(A + 2I_n) = I_n,$$

on peut alors affirmer que A est inversible et que son inverse est $A + 2I_n$.

Correction 29

1. On résout le système linéaire associé, on trouve que A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$ On a donc $A^2 - A = 2I_3$ donc $A(A - I_3) = 2I_3$.

   On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - I_3)$ ce qui est le résultat trouvé à la question précédente.

Correction 30 On écrit $M = 2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que I_3 commute avec toutes les matrices, en particulier avec N donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$M^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} N^k (2I_3)^{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} 2^{r-k} N^k.$$

Or,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N^3 = (0)$$

donc la somme se réduit à :

$$M^r = \sum_{k=0}^{2} \binom{r}{k} 2^{r-k} N^k = 2^r I_3 + 2^{r-1} r N + 2^{r-2} \frac{r(r-1)}{2} N^2,$$

soit encore :

$$M^r = 2^r I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2^{r-1}r & -2^{r-1}r \\ 0 & 0 & 2^{r-1}r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{r-3}r(r-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$M^r = \begin{pmatrix} 2^r & 2^{r-1}r & 2^{r-3}r(r-5) \\ 0 & 2^r & 2^{r-1}r \\ 0 & 0 & 2^r \end{pmatrix}.$$

Correction 31 On sait déjà que les coefficients diagonaux seront élevés à la puissance calculée et que toute puissance de M sera triangulaire supérieure. On calcule les premières puissances. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

et :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 26 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls sauf le coefficient en haut à gauche qui à été obtenu ainsi :

$$8 = 2 + 3 \times 2$$

et :

$$26 = 2 + 3 \times 8 = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2.$$

On a envie de penser que le coefficient en haut à gauche de M^r est :

$$2(1 + 3 + \ldots + 3^{r-1}) = 2\frac{3^r - 1}{3 - 1} = 3^r - 1,$$

et qu'on a :

$$M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}.$$

Supposons que c'est le cas et multiplions cette matrice par M pour voir si la formule est correcte au rang $r + 1$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^{r+1} - 1 \\ 0 & 2^{r+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{r+1} \end{pmatrix},$$

nous avons montré, par récurrence, que :

$$M^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^r - 1 \\ 0 & 2^r & 0 \\ 0 & 0 & 3^r \end{pmatrix}.$$

Correction 33

$$A^2 = (0) \text{ donc } A^n = (0), \forall n \geqslant 2$$

$$B^2 = 3B \text{ donc } B^n = 3^{n-1}B, \forall n \geqslant 1.$$

$$C^2 = 2C \text{ donc } C^n = 2^{n-1}C, \forall n \geqslant 1.$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } D^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$E^3 = (0) \text{ donc } E^n = (0) \forall n \geqslant 3$$

Enfin, on a

$$F^4 = -F \text{ donc } F^5 = -F^2, F^6 = -F^3 \text{ puis } F^7 = F.$$

Si on prend $n = 3p + q$ avec $q \in [\![1, 3]\!]$, on a $F^n = (-1)^p F^q$.