Correction du TD n 11

Correction 1 1. On a $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par le théorème de croissances comparées donc $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0$ et $x \sim_{x\to+\infty} x+1$ donc $f_1(x) \sim \ln(x)$ ce qui implique $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

2. On a $\lim_{x\to 0} \sin(x)e^{-x} = 0$. Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et sin est bornée donc $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0$.

3. On a $\lim_{x\to 0} x^3\cos(x) = 0$. En $+\infty$, la fonction n'a pas de limite. En effet, si on pose $a_n = 2n\pi$ et $b_n = 2n\pi + \pi$, on a $f_3(a_n) \to +\infty$ et $f_3(b_n) \to -\infty$ alors que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

4. On a $\dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2} = \dfrac{x+2}{x(x-1)} \sim_{x\to 0} -\dfrac{2}{x}$. Or $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ n'a pas de limite en 0 (limite à gauche et à droite différentes), on en déduit que $f_4(x)$ non plus. En $+\infty$, on a $f_4(x) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc $\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = 0$.

5. $a_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, on a $f_5(a_n) = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $f_5(b_n) = \cos\dfrac{1}{2n\pi} \to 1$ donc f_5 n'admet pas de limite en 0. Comme $f_5\left(\dfrac{1}{x}\right) = f_5(x)$, f_5 n'admet pas non plus de limite en $+\infty$.

6. $\lim_{x\to 0} f_6(x) = 0$ et f_6 n'admet pas de limite en $+\infty$ en prenant $a_n = 2n\pi$ et $b_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$. On a $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, $f_6(a_n) = 0$ et $f_6(b_n) = b_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_6(a_n) = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} f_6(b_n) = +\infty$.

7.

Correction 2 On a $\lim_{s\to 1^+} \dfrac{(s-1)\ln(s-1)}{s^2} = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{t\ln(t)}{(1+t)^2} = 0$ par croissances comparées.

On a $\lim_{t\to 0^+} t^2 e^{\frac{1}{t}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissances comparées.

Correction 3 1. On a f strictement décroissante en tant que somme de fonctions strictement décroissantes donc f est injective. On a également $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ donc, par continuité de f, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. On a donc bien f bijective.

2. On sait que f^{-1} est continue puisque f l'est. On a $2^{-n} \to 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}) = f^{-1}(0)$. Or $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 + x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ donc $f^{-1}(0) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}) = \dfrac{1}{2}$.

Correction 4 Soient $A > 0$. On veut montrer qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\phi(n) > A$.

On pose $\Omega = \{n \in \mathbb{N}, \phi(n) \leqslant A\}$.

Si Ω est vide, alors $\phi(n) > A$, $\forall n \geqslant 0$ et on prend $n_0 = 0$. Sinon, montrons que Ω est fini. On suppose par l'absurde qu'il est infini. On a alors un nombre infini d'entiers n dont l'image est inférieure à A. Or ϕ étant à valeurs entières, il y a $\lfloor A \rfloor$ images distinctes possibles inférieures à A. Comme ϕ est injective, on a une contradiction. L'ensemble Ω est donc fini et non-vide ce qui entraine qu'il possède un maximum n_0, on a alors, par définition de Ω, $\phi(n) > A$, $\forall n \geqslant n_0$;

Dans les deux cas, on a montré que pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(n) > A, \forall n \geqslant n_0$ ce qui montre que ϕ tend vers $+\infty$.

On peut aussi raisonner par l'absurde avec la définition de la limite. On suppose par l'absurde que ϕ ne tend pas vers $+\infty$. Alors, il existe $A > 0$ tel que $\forall N, \exists n \geqslant N$, $\phi(n) < A$.

On pose $m = \lfloor A \rfloor + 1$. On applique ce qui précède avec $N = 0$. On sait qu'il existe $n_0 \geqslant 0$, $\phi(n_0) < A$. En appliquant ce qui précède avec $N = n_0 + 1$, on sait qu'il existe $n_1 \geqslant n_0 + 1$ tel que $\phi(n_1) < A$. On construit ainsi une famille $(n_0, n_1, \dots, n_m)$ d'entiers strictement croissante telle que $\phi(n_i) < A$. Or cette famille compte $m+1$ entiers distincts dont les images appartiennent à l'intervalle $[0, A]$ donc $[\![0, m-1]\!]$ qui contient m entiers. On en déduit que deux de ces entiers ont même image par ϕ ce qui contredit l'injectivité de ϕ.

Correction 5 D'après l'exercice **??**, on sait que ϕ et ϕ^{-1} tendent vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

Montrons tout d'abord que ℓ ne peut être nul. En effet, si c'est le cas, on sait qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, on a $\phi(n) < \frac{n_0}{2}$. L'ensemble $\{\phi(n), n \in [|n_0, 2n_0|]\}$ contient $n_0 + 1$ éléments entiers distincts compris entre 0 et $\frac{n_0}{2}$ ce qui est impossible par le principe des tiroirs. On a donc $\ell \neq 0$.
Par ailleurs, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\phi^{-1}(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\phi\circ\phi^{-1}(n)}{\phi^{-1}(n)} = \lim_{m\to+\infty} \frac{\phi(m)}{m}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\phi^{-1}(n)=+\infty$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\phi^{-1}(n)}=\ell.$$

On a donc $\left(\frac{\phi(n)}{n}\right)^2=\frac{\phi(n)}{n}.\frac{\phi(n)}{\phi^{-1}\circ\phi(n)}\to\ell.\frac{1}{\ell}=1$. Par unicité de la limite, on a donc $\ell^2=1$ et comme ℓ est positif ou nul, on a $\ell=1$.

Correction 6 On pose $x_n=\dfrac{1}{2n}$ et $y_n=\dfrac{1}{2n+1}$, on a bien $x_n\to0$ et $y_n\to0$ mais $f(x_n)=2n$ et $f(y_n)=-(2n+1)$ qui tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ donc f n'admet pas de limite en 0.

Correction 7 1. Pour tout $x\in\mathbb{R}^\star$, $\dfrac{1}{x}-1<\lfloor\dfrac{1}{x}\rfloor\leqslant\dfrac{1}{x}$ donc

$$1-x<f(x)\leqslant1$$

Par le thm des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac12^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac12^+}x=\dfrac12$ et $\lim\limits_{x\to\frac12^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac12^-}2x=1$ donc f n'admet pas de limite en $\dfrac12$.
3. Pour tout $x>1$, $\lfloor\dfrac{1}{x}\rfloor=0$ donc $f(x)=0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$.
4. Comme $\lfloor x\rfloor$ est continue au voisinage de $\dfrac32$, on a $\lim\limits_{x\to\frac23}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac32}\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}=\dfrac23$.
5. Pour tout $x>1$, $f(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.
6. Pour tout $x<-1$, $\lfloor\dfrac{1}{x}\rfloor=-1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$.

Correction 8 On a $\lim\limits_{t\to0}f(t)=0$ par croissances comparées. Il existe donc $\eta>0$ tel que $\forall t\in]0,\eta[$, $|f(t)|\leqslant\dfrac12$.

$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t}$ car $\dfrac{1}{1+t^2}\sim\dfrac{1}{t^2}$. On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$ par croissances comparées.

On en déduit qu'il existe $A>0$ tel que $\forall t>A$, $|f(t)|\leqslant\dfrac12$.

Sur le segment $[\eta,A]$, la fonction f est continue donc bornée. On en déduit que f est bornée sur tout $]0,+\infty[$.

On a $\lim\limits_{t\to1}g(t)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\sin(x)}{x}+\dfrac{(x+1)^2\cos(x+1)}{e^{x+1}}\to1+\dfrac{\cos(1)}{e}$. Comme $1+\dfrac{\cos(1)}{e}<2$, il existe $\eta>0$ tel que $\forall t\in]1,1+\eta[$, $|g(t)|<2$.

On ne peut calculer la limite en $+\infty$ car elle n'existe pas. Nous allons dire que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2\cos(t)}{e^t}=0$ par croissances comparées et du fait que cos est borné. Il existe donc $A>0$ tel que $\forall t>A$, $\left|\dfrac{t^2\cos(t)}{e^t}\right|<\dfrac12$.

On a aussi $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{t-1}=1$ donc il existe $A'>0$ tel que $\forall t>A'$, $\left|\dfrac{t}{t-1}\right|<\dfrac32$. On en déduit que pour tout $t>A'$, $\left|\dfrac{t\sin(t-1)}{t-1}\right|<\dfrac32$.

Enfin, en posant $A"=\max(A,A')$, on a, pour tout $t>A"$, $|g(t)|\leqslant\left|\dfrac{t\sin(t-1)}{t-1}\right|+\left|\dfrac{t^2\cos(t)}{e^t}\right|$ par l'inégalité triangulaire donc $|g(t)|<2$. On en déduit que f est bornée sur $]1,1+\eta[$ et sur $]A",+\infty[$. Il reste à remarque que g est bornée sur le segment $[1+\eta,A"]$ car elle y est continue. La fonction g est donc bornée sur $]1,+\infty[$.

Correction 9 Soit $\epsilon>0$, alors il existe $A>0$ tel que $\forall x>A$, on ait $|f(x)|<\epsilon$. Soit maintenant $y\in\mathbb{R}$, alors il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $y+nT>A$, on a alors $f(y+nT)\in]-\epsilon,+\epsilon[$ donc $f(y)\in]-\epsilon,\epsilon[$ puisque $f(y)=f(y+nT)$. Ceci étant vrai pour tout réel ϵ, la fonction f est nulle.

Correction 10 Si f est continue en 0, il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(\dfrac1n\right)=f(0)$. On suppose maintenant que la limite de $\left(f\left(\frac1n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est $f(0)$ et nous allons montrer que f est continue en 0.
Soit $\epsilon>0$, alors, comme $\left(f\left(\frac1n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(0)$, il existe un rang N tel que $\forall n\geqslant N, \mid f(0)-f\left(\frac1n\right)\mid<\epsilon$. Soit maintenant $\eta=\frac1N$, alors pour $x\in[0,\eta]$, on a $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(\eta)$ par croissance de f, or $f(\eta)=f\left(\frac1N\right)\leqslant f(0)+\epsilon$ ce qui impose $\mid f(x)-f(0)\mid<\epsilon$ d'où la continuité en 0 de f.

C'est faux si on ne suppose pas la croissance de f. Prenons par exemple la fonction définie par $f(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ si $x\neq0$ et $f(0)=1$. Alors

$$f\left(\frac1n\right)=\cos(2n\pi)=1=f(0).$$

En revanche, f n'a pas de limite en 0. En effet, si elle en avait une, on devrait trouver la même limite pour $f(u_n)$ quelque soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0. Pour $u_n=\frac{2}{2n+1}$, on trouve $f(u_n)=\cos(2n+1)\pi=-1\neq1$ ce qui montre que f n'admet pas de limite en 0.

Correction 11 On calcule la limite en 0^+. On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ ce qui montre que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.

Correction 12 Pour $x > 1$, on a $f(x) = 0$, pour tout $x < -1$, $f(x) = -x^2$ donc f est continue sur $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$. Pour $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$, si $\dfrac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$, la fonction f est continue en tant que produit et composée de fonction continue. Soit $k \in \mathbb{Z}^\star$. Étudions la limite à gauche et à droite en $\dfrac{1}{k}$: • Si $x \in \left]\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right]$, alors $\dfrac{1}{x} \in [k, k+1[$ donc $E\dfrac{1}{x} = k$ et $f(x) = x^2 k$ ce qui implique $\lim\limits_{x\to \frac{1}{k}^-} f(x) = \dfrac{1}{k}$.

• Si $x \in \left]\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k-1}\right]$, alors $\dfrac{1}{x} \in [k-1, k[$ donc $E\dfrac{1}{x} = k-1$ et $f(x) = x^2(k-1)$ ce qui implique $\lim\limits_{x\to \frac{1}{k}^+} f(x) = \dfrac{k-1}{k^2}$.

La fonction f n'admet pas la même limite à gauche et à droite en $\dfrac{1}{k}$. Elle est donc discontinue en tous les inverses des entiers.

On a donc montré que f est continue sur $\mathbb{R}^\star \setminus \{\dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^\star\}$.

Correction 13 Pour tout $x \notin \mathbb{Z}$, la fonction f est continue car la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout $x \in [k-1, k[$, on a $\lfloor x \rfloor = k-1$ donc $f(x) = \sqrt{x-(k-1)} + (k-1)$ et $\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = k$.

Pour tout $x \in [k, k+1[$, on a $\lfloor x \rfloor = k$ donc $f(x) = \sqrt{x-k} + k$ et $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = k$. Comme $f(k) = k$, on a bien f continue en k donc f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

Correction 14 Pour tout $x \notin \mathbb{Z}$, la fonction f est continue car la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout $x \in [k-1, k[$, on a $\lfloor x \rfloor = k-1$ donc $f(x) = \sqrt{x-(k-1)} + x$ et $\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = k+1$.

Pour tout $x \in [k, k+1[$, on a $\lfloor x \rfloor = k$ donc $f(x) = \sqrt{x-k} + x$ et $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = k$. On a $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to k^-} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en k et n'est donc pas continue en k.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Correction 15 Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme, composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour étudier la continuité en 0, on écrit :

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{x} = \frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x} \times \frac{\arctan x}{x}.$$

On sait que $\dfrac{\arctan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et, comme $\lim\limits_{x\to 0} \arctan x = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$, on a

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x} = 1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc la fonction est bien continue.

Correction 16 Elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ car la fonction partie entière l'est sur cet ensemble. Soit $n \in \mathbb{Z}$, déterminons la limite à gauche et à droite de f en n. Si $x \in [n-1, n[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$ donc $f(x) = (n-1) + (x-(n-1))^2$. On a donc

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = n.$$

Si $x \in [n, n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$ donc $f(x) = n + (x-n)^2$. On a donc :

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = n.$$

Enfin, $f(n) = n + (n-n)^2 = n$. On a donc $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = \lim\limits_{x\to n^+} f(x) = f(n)$ donc f est continue en n. Ceci étant vrai pour tout entier, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $y \leqslant x$, on a $f(y) \leqslant f(x)$ par croissance de f et $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{f(y)}{y}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$. On a donc, comme $y > 0$,

$$\frac{y}{x} f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(x).$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{y\to x^-} f(y) = f(x)$. On fait de même pour $y \geqslant x$, on a $f(x) \leqslant f(y)$ et $\dfrac{f(y)}{y} \leqslant \dfrac{f(x)}{x}$ donc

$$f(x) \leqslant f(y) \leqslant \frac{y}{x} f(x).$$

Par le théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{y\to x^+} f(y) = f(x)$. On a montré que :

$$\lim_{y\to x} f(y) = f(x).$$

La fonction f est continue en x. Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Correction 18 On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ en déterminant un équivalent, la fonction est donc prolongeable par continuité en posant $f(0) = 2$.

Correction 19 On a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ par croissances comparées, l'application n'est donc pas prolongeable par continuité.

Correction 20 On pose $x = 1 + y$, on a $f(x) = f(1+y) = \dfrac{\sqrt{1+y}-1}{\ln(1+y)} \sim \dfrac{y/2}{y}$. L'application est donc prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Correction 21 On écrit :

$$(\ln|x|)^4 \ln(1+x^4) = x^4 (\ln|x|)^4 \times \frac{\ln(1+x^4)}{x^4}.$$

Le premier quotient tend vers 0 par le théorème de croissances comparées tandis que le second tend vers 1. On en déduit que la limite de la fonction en 0 est 0, elle peut donc être prolongée par continuité en posant $f(0) = 0$.

Correction 22 La fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et la fonction est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

Correction 23 Il faut déterminer si la fonction possède une limite finie en 0. Pour cela, on remarque que la fonction est un taux d'accroissement. Précisément, si on pose $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0},$$

sa limite quand x tend vers 0 est donc égale à $g'(0) = \dfrac{1}{2}$. On peut, par conséquent, prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Correction 24 On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue.

La fonction f étant décroissante, elle admet une limite en $+\infty$ et une limite en $= -\infty$. Comme f est décroissante, sa limite en $-\infty$ ne peut être égale à $-\infty$. Sa limite est donc réelle ou vaut $+\infty$. Dans les deux cas, on a $\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$.

De même, la limite de f en $+\infty$ ne peut être égale à $+\infty$. La limite de $g(x)$ en $+\infty$ est donc égale à $-\infty$.

On en déduit que l'image de g est $\mathbb{R}$, 0 admet donc un antécédent par g, ce qui montre que f admet un point fixe.

Correction 25 On suppose par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe alors deux réels a et b tels que $f(a) \neq f(b)$. On suppose, sans nuire à la généralité, que $f(a) < f(b)$. On a alors $f(a) + \dfrac{1}{2} < f(b)$ car $f(a)$ et $f(b)$ sont des entiers. La fonction f étant continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = f(a) + \dfrac{1}{2}$ ce qui est impossible car $f(a) + \dfrac{1}{2}$ ne peut pas être un entier.

Correction 26 La fonction f est continue et ne s'annule pas, elle est donc de signe constant. On en déduit qu'elle est constante égale à 1 ou à -1.

Correction 27 On pose $\phi : x \mapsto f(x) - x$. On a $\phi(a) = f(a) - a > 0$ et $\phi(b) = f(b) - b < 0$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ s'annule en un point c de $]a, b[$.

Correction 28 On pose $g(x) = f(x + 1/2) - f(x)$. La fonction g est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et on a $g(0) = f(1/2) - f(0)$ et $g(1/2) = f(1) - f(1/2) = -g(0)$. Si $g(0) = 0$ alors $c = 0$ convient. Sinon, $g(0)$ et $g(1/2)$ sont de signes opposés; par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule donc au moins une fois entre 0 et $\frac{1}{2}$ donc il existe $c \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $g(c) = 0$ d'où $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.

Correction 29 On a

$$g(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a)$$

et

$$g(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2}).$$

Comme $f(a) = f(b)$ alors $f(a) = -g(\frac{a+b}{2})$ ce qui implique :

$$g(a)g(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0.$$

Si $g(a) = 0$ ou $g(\frac{a+b}{2}) = 0$, la fonction g s'annule. Sinon, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à g qui est continue et on montre que g s'annule en un point c strictement compris entre a et $\frac{a+b}{2}$.

Correction 30 Par définition de la limite, il existe A tel que $\forall x \leqslant A$, $f(x) < -1$ donc il existe x tel que $f(x) < 0$. De même, comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe y tel que $f(y) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires qui s'applique puisque f est continue, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) = 0$, donc f s'annule.

On peut aussi dire que f est continue donc l'image d'un intervalle est un intervalle. Comme $\lim_{-\infty} f = -\infty$, cet intervalle est non minoré et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ implique qu'il est également non majoré. On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc f s'annule.

Les polynômes de degré impair de coefficient dominant strictement positif vérifient les hypothèses sur les limites, donc s'annulent. Pour ceux de coefficient dominant strictement négatif, leur opposé vérifie les hypothèses donc s'annule. Ceci est faux, en général, pour les polynômes de degré pair, par exemple regardez $f(x) = x^2 + 1$.

Correction 31 Supposons par l'absurde qu'il existe a, b tels que $f(a) > c$ et $f(b) < c$, on applique alors le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b et on obtient un point en lequel f vaut c ce qui est une contradiction.

On peut aussi dire que la fonction $x \mapsto f(x) - c$ est continue et ne s'annule pas donc elle est de signe constant.

Correction 32 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $g_n : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$. On cherche à montrer qu'il existe α_n tel que $g_n(\alpha_n) = 0$. On remarque que la somme $\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right)$ est une somme télescopique, on a donc: $\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0$.

Si tous les termes de la somme sont nuls, la fonction g_n s'annule ce qui montre l'existence de α_n.

Si tous les termes sont non nuls, il existe au moins deux termes de la somme qui sont de signes opposés. On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre ces deux réels, puisque g_n est continue, et trouver un point d'annulation de la fonction g_n.

On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \exists \alpha_n \in]0,1[, g(\alpha_n) = 0$, ce qui est équivalent à

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \exists \alpha_n \in]0,1[, f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n).$$

Correction 33 On suppose par l'absurde que f n'est pas constante. Il existe donc $a \neq b$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Sans nuire à la généralité, on suppose $f(a) < f(b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f(a) < \dfrac{f(b) - f(a)}{n} + f(a) < f(b)$ donc, par le TVI, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_n) = \dfrac{f(b) - f(a)}{n} + f(a)$. On a ainsi montré que f prend une infinité de valeurs différentes ce qui contredit l'hypothèse sur f. On en déduit que f est constante.

Correction 34 Si f n'est pas strictement monotone, alors il existe

- $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$ (f n'est pas strictement décroissante)
- et $x' < y'$ tels que $f(x') > f(y')$ (f n'est pas strictement croissante).

On pose $g(t) = f(x + t(x - x')) - f(y + t(y' - y))$. alors

- g est définie sur $[0, 1]$ et continue.
- $g(0) = f(x) - f(y) < 0$.
- $g(1) = f(x') - f(y') > 0$

donc d'après le TV1, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 0$ ce qui est équivalent à $f(x+c(x-x')) = f(y+c(y-y')$. Or f est bijective donc $x+c(x'-x) = y+c(y'-y)$ ce qui se réécrit:

$$\underbrace{(x - y)(1 - c)}_{<0} = \underbrace{c(y' - x')}_{>0}$$

ce qui est impossible donc f est strictement monotone.

Correction 35 Soit $T > 0$ une période. Alors f est continue sur le segment $[0, T]$ donc bornée. Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0, T], |f(x)| \leqslant K.$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + nT \in [0, T]$. On a alors $f(x) = f(x + nT)$ par périodicité et, comme $x + nT \in [0, T]$, $|f(x + nT)| \leqslant K$. On en déduit que $|f(x)| \leqslant K$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction est bornée.

Correction 36

1. On sait qu'il existe $A > 0$ et $B < 0$ tel que:

$$\forall x > A, |f(x)| < \frac{1}{2} \text{ et } \forall x < B, |f(x)| < \frac{1}{2}$$

Soit $a = \max(A, |B|)$, alors, $\forall x$ tel que $|x| > a$, on a $|f(x)| < \frac{1}{2}$ donc $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

2. f est bornée sur $] - \infty, -a[\cup]a, +\infty[$ par $\frac{1}{2}$ et elle est bornée sur le segment $[-a, a]$ car elle est continue. Comme $f(0) = 1 > \frac{1}{2}$, le sup de f est atteint sur $[-a, a]$ et comme f est continue sur ce segment, elle atteint ses bornes et possède donc un maximum.

Correction 37 Par définition de la limite, on peut trouver $A > 0$ tel que: $\forall x > A, f(x) \in]\ell - 1, \ell + 1[$. Par ailleurs, f est continue sur le segment $[0, A]$ donc bornée, il existe donc un réel K tel que $\forall x \in [0, A], |f(x)| \leqslant K$. Au final, on a $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leqslant \max(K, |\ell| + 1)$ donc f est bornée.

Correction 38 On pose $\alpha = \sup\limits_{x\in[a,b]}(f) = \sup\limits_{x\in[a,b]}(g)$. On sait que f et g sont continues sur le segment $[a, b]$ donc elles atteignent leurs bornes. On a donc $\alpha = f(x_0) = g(x_1)$. On pose $h = f - g$. La fonction h est continue.

On a $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = \sup g - g(x_0) \geqslant 0$ et $h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = f(x_1) - \sup f \leqslant 0$.

Si $h(x_0) = 0$ ou $h(x_1) = 0$, h s'annule. Sinon, $h(x_0)h(x_1) < 0$ et on applique le TVI à h qui doit donc s'annuler.

Remarque: si on suppose uniquement f et g bornées sur un intervalle quelconque I, cela ne marche pas. En effet, prenons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

et

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

Alors on a $\sup f = \sup g = 1$ et pourtant, il n'existe pas de réels c tel que $f(c) = g(c) = 1$.

Cela redevient vrai si on suppose f et g non constantes.

Correction 39 Cela revient à montrer l'existence de $c \in]0, 1[$ tel que

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - f(c)\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

on pose donc $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, et nous allons montrer que h s'annule.

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$h(x) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t) - f(x))\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On sait que g est strictement positive, il suffit donc de trouver deux éléments α et β tels que

$$\forall t \in [0, 1], f(\alpha) - f(t) \geqslant 0 \text{ et } f(\beta) - f(t) \leqslant 0.$$

On aura alors $h(\alpha) \geqslant 0$ et $h(\beta) \leqslant 0$.

L'existence de ces deux réels vient du fait qu'une fonction continue sur un segment atteint ses bornes. On sait donc qu'il existe deux tels réels α et β.

Si $h(\alpha) = 0$ ou $h(\beta) = 0$, on a montré que h s'annule. Sinon, on applique le théorème des valeurs intermédiaires entre α et β pour affirmer l'existence d'un point compris entre α et β, en lequel h s'annule. On a bien montré l'existence de $c \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Correction 40 On pose $h = \dfrac{f}{g}$. Cette fonction est continue sur le segment $[0, 1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. On en déduit qu'il existe $\beta \in [0, 1]$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], h(x) \geqslant h(\beta).$$

Par hypothèse, on a $h(\beta) > 1$. Posons $\alpha = \dfrac{h(\beta) + 1}{2}$. On a alors $h(\beta) > \alpha > 1$ et:

$$\forall x \in [0, 1],\ h(x) > \alpha,$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) > \alpha g(x).$$

Correction 41

1. Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ donc on peut poser $f(0) = 0$. On a $f(x) = \dfrac{x^2 \ln(1 + (x - 1))}{x - 1}$ avec $x - 1 \to 0$, on a donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ et on peut poser $f(1) = 1$. La fonction f est bien prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.
2. La fonction f (prolongée) est continue sur le segment $[0, 1]$ donc bornée. Notons K un majorant de sa valeur absolue. On a alors
$$|I_n| \leqslant \int_0^1 x^n K\,\mathrm{d}x,$$
donc, en sortant la constante K et en calculant l'intégrale de droite
$$|I_n| \leqslant \frac{K}{n + 1}.$$
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Correction 42

1. Notons Ω l'ensemble des points fixes de f. Montrons tout d'abord que cet ensemble est non-vide. La fonction f étant définie de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, on a $f(0) \geqslant 0$ et $f(1) - 1 \leqslant 0$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $x \mapsto f(x) - x$, cette dernière s'annule donc f admet un point fixe. Comme f est définie sur $[0, 1]$, $\Omega \subset [0, 1]$ donc Ω est borné. On peut alors affirmer que Ω admet une borne supérieure et une borne inférieure. Reste à savoir si ses bornes sont atteintes !

   Notons $\alpha = \sup \Omega$. Il existe alors une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω telle que $\alpha_n \to \alpha$. Par définition, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) = \alpha_n$. Or, f étant continue, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\alpha_n) = f(\alpha)$. Par unicité de la limite, on a $f(\alpha) = \alpha$ donc $\alpha \in \Omega$.

   On procède de même pour $\beta = \inf \Omega$. On a montré que l'ensemble Ω des points fixes de f admet un minimum β et un maximum α.

2. Soit $\lambda \in \Omega$. Alors $f(\lambda) = \lambda$ donc $g \circ f(\lambda) = g(\lambda)$. Or, par hypothèse, $g \circ f = f \circ g$ donc $g \circ f(\lambda) = f \circ g(\lambda)$. On a donc $f \circ g(\lambda) = g(\lambda)$ donc $g(\lambda) \in \Omega$.

3. On sait que $\alpha = \max \Omega$ est un élément de Ω donc, d'après la question précédente, $g(\alpha) \in \Omega$. De même, $g(\beta) \in \Omega$. Or, α et β étant le maximum et le minimum de Ω, on a $g(\alpha) \leqslant \alpha$ et $g(\beta) \geqslant \beta$, ce qui se réécrit $g(\alpha) \leqslant f(\alpha)$ et $g(\beta) \geqslant f(\beta)$ puisque α et β sont des points fixes de f. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $f - g$ qui est continue. Cela nous donne l'existence d'un réel x tel que $f(x) = g(x)$.

Correction 43 Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$. Par continuité de f et g, on a $f(x_n) \to f(x)$ et $g(x_n) \to x$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$ car $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{Q}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)$ donc $f(x) = g(x)$.

Ceci étant vrai pour tout réel x, on a montré $f = g$.

Correction 44 Soit f une telle fonction. Pour $x = y$, on a $f\left(\dfrac{2x}{5}\right) = f(x)$. Ceci étant valable pour tout x, c'est vrai aussi pour $\dfrac{2x}{5}$ ce qui donne :

$$f\left(\frac{2}{5}\frac{2x}{5}\right) = f\left(\frac{2x}{5}\right) = f(x).$$

Par une récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n x\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n x \to 0$ et f est continue en 0 donc $f\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n x\right) \to 0$. Par unicité de la limite, on a $f(x) = f(0)$.
Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction est constante.

Réciproquement, une fonction constante vérifie bien la relation donc l'ensemble recherché est l'ensemble des fonctions constantes.

Correction 45 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ et par récurrence immédiate, on montre que $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. On fait maintenant tendre n vers $+\infty$. Alors, par continuité de f en 0, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$ et comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$, on a $f(x) = f(0)$ par unicité de la limite. Ceci étant valable pour tout x, f est bien constante.

Correction 46 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(x^2)$ puis $f(x^2) = f(x^4)$ donc $f(x) = f(x^4)$. Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{2^n})$.

Soit maintenant $x > 0$. Alors $f(\sqrt{x}) = f(x)$ et $f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = f(\sqrt{x})$ donc $f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = f(x)$ et, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$.

- Si $|x| < 1$, alors $f(x) = f(x^{2^n})$ tend vers $f(0)$ par continuité de f en 0, on a donc $f(x) = f(0)$.
- Soit maintenant $x \geqslant 1$, alors $x^{\frac{1}{2^n}} \to 1$ donc par continuité de f en 1, on a $f(x) = f(1)$. Or, d'après le travail fait ci-dessus, on a $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(0)$, par unicité de la limite, on a $f(0) = f(1)$.
Ainsi, nous avons montré que $\forall x > -1, f(x) = f(0)$.
- Soit maintenant $x \leqslant -1$, alors $x^2 > 0$ donc $f(x^2) = f(0)$. Or $f(x) = f(x^2)$ d'où $f(x) = f(0)$.

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction 47 1. On le montre par récurrence sur n, après avoir fixé un réel x. Le cas $n = 1$ est facile mais il faut initialiser à 0. On remarque donc que pour $x = y = 0$, on a $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$. L'égalité est donc vraie au rang $n = 0$.

On suppose qu'il existe un entier n tel que $f(nx) = nf(x)$. On écrit

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x),$$

puis, par hypothèse de récurrence, $f(nx) = nf(x)$ donc

$$f((n+1)x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Le résultat est vrai au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout entier n.

2. On sait que $f(0) = 0$, on a donc $f(x - x) = 0 = f(x) + f(-x)$. On en déduit que f est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

   - Si $n \geqslant 0$, le résultat est vrai d'après la question précédente.
   - Si $n < 0$, on pose $m = -n > 0$, on a donc $f(mx) = mf(x)$. Or $f(mx) = f(-nx) = -f(nx)$. On a donc $f(nx) = -mx = nx$ et le résultat est encore vrai.

   On a montré, par disjonction de cas que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.

3. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors $x = \dfrac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

   On a $f(qx) = qf(x)$ d'après la question précédente et $f(qx) = f(p) = pf(1)$ toujours d'après la question précédente. On en déduit que $f(x) = \dfrac{1}{q} f(qx) = \dfrac{p}{q} f(1) = xf(1)$.

   On a bien l'égalité souhaitée.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$. Par continuité de f, $f(x_n) \to f(x)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n f(1)$ puisque $x_n \in \mathbb{Q}$. On en déduit, par unicité de la limite, que $f(x) = xf(1)$.

   On a montré que si f vérifie cette relation, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$. Réciproquement, les fonctions de la forme $x \mapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$ vérifie cette relation.

   Ainsi, les fonctions vérifiant cette relation sont les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.