Dérivabilité

1 Dérivée en un point, fonction dérivée

1.1 Définitions

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point intérieur à I.

Définition 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si la limite quand x tend vers a de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

On appelle alors nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, ce réel. La quantité $\dfrac{f(x)-f(x)}{x-a}$ est appelé taux d'accroissement.

Interprétation géométrique :
Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la corde reliant les points d'abscisse a et x du graphe de f. Quand f est dérivable, la corde se "rapproche" de la tangente au graphe en a dont le coefficient directeur vaut $f'(a)$.

Définition 2. Lorsque f admet une limite infinie quand x tend vers a, le graphe de f admet une tangente verticale en ce point (d'équation $x = a$).

Exemple 1. *Calculer la dérivée de $f_n(x) = x^n$ en $a \in \mathbb{R}$.*

Définition 3. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Exemples 2.

1. *Un polynôme est dérivable.*
2. *Une fraction rationnelle est dérivable.*
3. $x \mapsto \sqrt{x}$ *n'est pas dérivable en 0.*
4. $x \mapsto |x|$ *n'est pas dérivable en 0.*

Définition 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On appelle fonction dérivée, notée f' la fonction qui à x associe $f'(x)$.

Définition 5. Si $f : I \to \mathbb{R}$ avec a une extrémité de I, on peut parler de dérivée à gauche ou à droite de f en a.

Exemple 3. *La fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$.*

Définition 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0. Alors $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$. Cette expression (qui n'a d'intérêt qu'au voisinage de x_0) est appelé DL à l'ordre 1 de f.

Proposition 1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, alors f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.

Exemple 4. *On considère* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$ *, est-elle dérivable en* 0*?*

1.2 Propriétés

Proposition 2.
Soient f et g deux fonctions dérivables, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
2. $f + g$ est dérivable et $(f + g)' = f' + g'$
3. fg est dérivable et $(fg)' = f'g + g'f$.
4. Si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{f^2}$.

Proposition 3.
Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$; on suppose f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

Conséquences : f^n est dérivable si f l'est.

Proposition 4.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, alors f est continue.

1.3 Signe de la dérivée et monotonie

Proposition 5.
Si f est dérivable sur un intervalle I. Alors

1. f est croissante ssi $f'(x) \geqslant 0, \forall x \in I$.
2. Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, elle est strictement croissante sur I.
3. Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et f' ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point, alors elle est strictement croissante sur I.

On se souvient qu'il est impératif de travailler sur un intervalle!

Exemple 5. *Considérons f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}+1 & si\ x<0 \\ \\ \dfrac{1}{x}-2 & si\ x>0 \end{cases}$. *Que dire du signe de la dérivée?*

On en déduit :

Proposition 6.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle et de dérivée nulle, alors f est constante <u>sur cet intervalle</u>

Pensez à la fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$

1.4 Extrema locaux

Définition 7. On dit que f admet un minimum (respectivement maximum) local en a s'il existe un intervalle J centré en a et un réel m tel que :

$$\forall x \in J, f(x) \geqslant m.$$

(respectivement $\forall x \in J, f(x) \leqslant m.$).
On dit qu'elle admet un extremum local si elle admet un maximum ou un minimum local.

Proposition 7.
Soient a un point de I qui n'est pas un extrémité de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarques.

1. *On peut admettre un minimum local sans être dérivable (valeur absolue).*
2. *Le résultat est faux si a est une extrémité. $f = id|_{[0,1]}$.*
3. *La réciproque est fausse : $x \mapsto x^3$.*

1.5 Théorème de la limite de la dérivée

Rappel: On dit qu'une fonction est de classe C^1 si f est dérivable et sa dérivée est continue.

Théorème 8 (Théorème de la limite de la dérivée)**.** *Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $f'(x)$ admet une limite finie en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.*

Remarques.

1. *Si f est de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$, on aura alors que f est de classe C^1 sur I.*
2. *Si $f'(x)$ n'admet pas de limite en a, cela ne signifie pas que f n'est pas dérivable en a ! On ne peut pas conclure, il faut revenir au taux d'accroissement.*

Exemples 6.

1. *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. *Est-elle dérivable en* 0*?*

2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *Est-elle dérivable en* 0*?*

Proposition 9.
Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$ alors f n'est pas dérivable en a ET le graphe de f admet une tangente verticale en le point d'abscisse $x = a$.

1.6 Dérivabilité de la bijection réciproque

Proposition 10.
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable, alors f^{-1} est dérivable sur $\{x \in J, f' \circ f^{-1}(x) \neq 0\}$ et, $\forall x \in J$ tel que $f' \circ f^{-1}(x) \neq 0$, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

Remarque: Le graphe d'une fonction bijective et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Lorsque $f'(a)$ est nul, la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = a$ est horizontale donc en le point d'abscisse $x = f(a)$, la tangente au graphe de f^{-1} est verticale.

2 Étude globale des fonctions dérivables

2.1 Théorème de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Théorème 11. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Remarques.

1. *si $f(0) \neq f(1)$, f' ne s'annule pas forcément ($f = id|_{[0,1]}$).*

2. *Si f pas continue sur $[0, 1]$, f' ne s'annule pas forcément $f(x) = x$ sur $]0, 1]$ et $f(1) = 1$.*

3. *si pas dérivable : $g(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$.*

Exemple 7. *Soit f une fonction dérivable deux fois qui s'annule en trois points distincts. Alors sa dérivée seconde s'annule au moins une fois.*

2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 12. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Interprétation géométrique :
Pour tout point a, b, on peut trouver un point du graphe en lequel la tangente au graphe est parallèle à la corde reliant les points d'abscisses a et b.

Corollaire 13.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Soit $k \geqslant 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant k$.
- $\forall (x,y) \in [a,b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.

Exemple 8. *Montrer que pour tout x, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.*

Remarque: Si f est dérivable de dérivée bornée, alors f est k-lipschitzienne, donc si f de classe C^1 sur $[a,b]$, alors f est k lipschitzienne.

Exercice: Soit g de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} g'(x)$. Montrer que g est lipschitzienne.

Application: Application aux suites récurrentes.

L'idée : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que l est un point fixe de f. On a alors $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)|$ donc, si f' est bornée par k, on a

$$|u_{n+1} - l| \leqslant k\,|u_n - l|\,,$$

puis, par récurrence, $|u_n - l| \leqslant k^n\,|u_0 - l|$. Si, par chance, $k \in]0,1[$, on aura alors directement la convergence de la suite vers le point fixe l.

Exemple 9. *On considère la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 1$.*
2. *Déterminer l'unique limite l possible.*
3. *Montrer qu'il existe un réel k tel que $|x_{n+1} - l| \leqslant k\,|x_n - l|$.*
4. *En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

3 Dérivées successives.

3.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.
La dérivabilité p fois de f et sa dérivée p-ème sont définies par récurrence :

Définition 8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose:

- $f^{(0)} = f$;
- $\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.

On dit que f **est dérivable** p **fois en** $x_0 \in I$ lorsque le nombre $f^{(p)}(x_0)$ existe. La fonction $f^{(p)}$ est **la dérivée** p**-ème de** f.

Attention à ne pas confondre $f^{(p)}$ et f^p

Définition 9. On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^p$ lorsqu'elle est p fois dérivable et que sa dérivée p-ème $f^{(p)}$ est continue.
On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ lorsque, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^p$.

Détaillons pour les quelques premières valeurs de p:

- f est de classe $\mathcal{C}^0$ signifie que f est continue
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ signifie que f est dérivable et sa dérivée continue
- f est de classe $\mathcal{C}^2$ signifie que f est deux fois dérivable et sa dérivée seconde est continue (sa dérivée première est aussi continue puisqu'elle est dérivable !)

Pour $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$:

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^q \implies f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p.$$

Exemples 10.

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Calculer $f_a^{(p)}$.*
2. *Calculer* $\sin^{(p)}$.
3. *Soit f une fonction polynomiale de degré n, calculer $f^{(p)}$ pour $p \geqslant n+1$.*

3.2 Opérations.

Soit $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Les ensembles :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^p(I, \mathbb{R}) &= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est } p \text{ fois dérivable sur } I\} \\ \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}) &= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I\} \end{aligned}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si f et g sont deux vecteurs de l'un de ces s.e.v. avec $p \in \mathbb{N}$, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha f + \beta g)^{(p)} = \alpha f^{(p)} + \beta g^{(p)}.$$

Remarque: Ces ensembles sont aussi stables par produit, et la dérivée du produit fg est donnée par la formule suivante.

Théorème 14 (de Leibniz)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions p fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).*
Alors, la fonction $f \times g$ est également p fois dérivable sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^p$) avec, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$(f \times g)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}.$$

Remarque. *Cette formule s'avère pratique notamment avec des fonctions polynomiales ou de dérivée k-ème s'exprimant simplement à l'aide de la fonction elle-même* (exp, sin, cos, ...)*.*

Exemples 11.

1. *Déterminer la dérivée p-ème de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$.*

2. *Écrire la dérivée p-ème de la fonction $x \mapsto x^3 \cos(x)$ en suivant le même raisonnement.*

On démontre également par récurrence la stabilité des ensembles ci-dessus par quotient et composition (en utilisant les formules connues pour les dérivées premières):

Proposition 15.
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions p fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).
On suppose de plus que g ne s'annule pas.
Alors, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est également p fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).

Proposition 16.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions p fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).
On suppose de plus que f est à valeurs dans J: $f(I) \subset J$.
Alors, la fonction $g \circ f$ est également p fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^p$).

Remarque: L'hypothèse "$f(I) \subset J$" permet de donner un sens à la composée $g \circ f$.

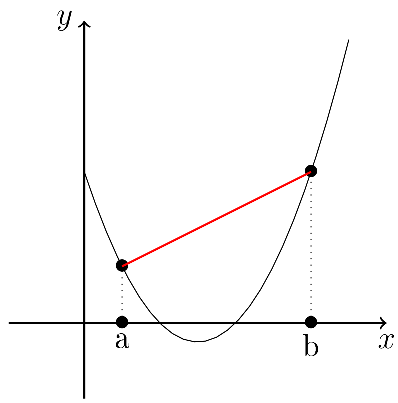
⚠ Il n'y a pas de formule générale simple pour les dérivées p-ème de $\dfrac{f}{g}$ et $g \circ f$.

4 Fonctions convexes

Définition 10. On dit que f est une fonction convexe si pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Interprétation géométrique: le graphe de f se situe en dessous de ses cordes:

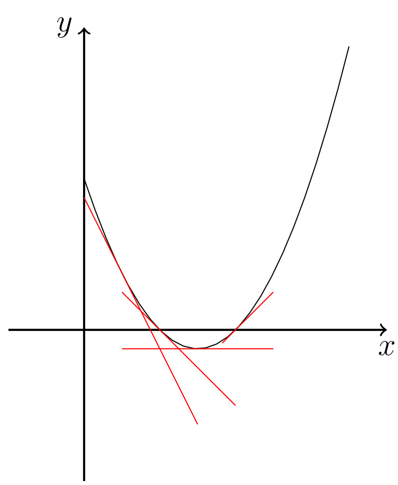


Proposition 17.
Soit f une fonction dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Interprétation géométrique:
Une fonction f est convexe si son graphe est au-dessus de ses tangentes.

Proposition 18.
Soit f une fonction deux fois dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f" est positive.

C'est juste la traduction de f' croissante lorsque f est deux fois dérivable.



5 Fonctions complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ avec $I \subset \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en un point a de I si $\mathcal{R}e(f)$ et $\mathcal{I}m(f)$ sont dérivables en a. On note alors $f'(a) = \mathcal{R}e(f)'(a) + i\mathcal{I}m(f)'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.